Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 1 vom 18.02.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Wir haben für Mengen X das Konzept eines metrischen Raumes (X, d) kennengelernt. (X, d) ist ein metrischer Raum, falls $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik ist, d.h. falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positivität)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Dann hatten wir die Definition einer Norm $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ auf einem linearen ($\mathbb{R}$)-Vektorraum gegeben

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positivität)
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (positive Homogeneität)
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Aufgabe 1 Sei $X = \mathbb{R}^n$. Seien d_0, d_1, d_2, d_∞ für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definiert als

(i) $d_0(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$

(ii) $d_1(x, y) := \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$

(iii) $d_2(x, y) := \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(iv) $d_\infty(x, y) := \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - y_j|$

Zeigen Sie, dass (X, d_0), (X, d_1), (X, d_2), (X, d_∞) metrische Räume sind.

Die Abgabe der Sternchenaufgabe ist freiwillig

*Aufgabe 2

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Die Hausdorff-Metrik ist definiert auf der Menge

$$X := \{A \subset S : \quad A \neq \emptyset,\ A \text{ abgeschlossen}\},$$

und für $A, B \in X$ gilt

$$d(A,B) := \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|\right\}$$

(i) Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(ii) Ist die Abgeschlossenheit dafür notwendig? D.h. ist auch $(\tilde{X}, d)$ ein metrischer Raum?

$$\tilde{X} := \{A \subset S : \quad A \neq \emptyset\},$$

Aufgabe 3

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und sei 0 der Ursprung von $\mathbb{R}^n$. Seien d_0, d_1, d_2, d_∞ wie oben. Wir setzen

$$\|x\|_i := d_i(x, 0) \quad i = 0, 1, 2, \infty.$$

(i) Für welche $i \in \{0, 1, 2, \infty\}$ ist $\|x\|_i$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$?

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}^n$ gelten diese Aussagen auch für $|||\cdot|||_i$ definiert als

$$|||x|||_i := d_i(x, p) \quad i = 0, 1, 2, \infty.$$

(iii) Finden Sie alle linearen, normierten Vektorräume $(V, \|\cdot\|_V)$, für die gilt $\|x - y\|_V = d_0(x, y)$.

Ein (reeller) Prä-Hilbertraum ist ein Vektorraum X zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, d.h. für alle $x, y, z \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\langle x, x\rangle \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
- $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

Aufgabe 4

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum.

Zeigen Sie, dass

$$\|x\|_X := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

eine Norm ist. Für die Dreiecks-Ungleichung dürfen Sie (ohne Beweis) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle x, y\rangle \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

verwenden.
