

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 10 vom 29.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kommentare zur Verbesserung:					

Aufgabe 35 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, und sei $C_0^1(\Omega)$ der Raum aller $C^1(\mathbb{R}^n)$ -Abbildungen mit $u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Gegeben sei für ein festes $f \in C_0^1(\Omega)$ das Variationsfunktional

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} f(x) u(x) dx.$$

wobei $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^T$ der Gradient ist.

Zeigen Sie: Falls $u \in C_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ und u ist ein Minimierer von E in $C_0^1(\Omega)$, d.h. falls

$$E(u) \leq E(v) \quad \text{für alle } v \in C_0^1(\Omega),$$

dann gilt

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{1}$$

Dabei ist $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u$ der Laplace-Operator. Sie können wie folgt vorgehen:

(i) (Variation:) Es gilt für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und alle $t \in \mathbb{R}$, $E(u) \leq E(u + t\varphi)$

(ii) Nehmen Sie die Ableitung in t um zu zeigen, dass die "schwache Formulierung von (1)" gilt:

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega) : \quad - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

(iii) Schließen Sie

$$\int_{\Omega} (\Delta u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

(iv) Wählen Sie ein geeignetes φ , um $\|\Delta u - f\|_{L^2} = 0$ und somit (1) zu erhalten.

Aufgabe 36 (*Sobolev-Raum*) Wir bezeichnen mit ∂_1 den Ableitungsoperator, d.h. $\partial_1 f(x) = f'(x)$. Sei $X := L^2((0, 1))$ mit der üblichen L^2 -Norm, und $D(\partial_1) := C^1([0, 1]) \subset X$. Dann können wir ∂_1 als (nicht-stetigen) Operator $\partial_1 : D(\partial_1) \rightarrow X$ auffassen.

(i) Zeigen Sie: ∂_1 ist ein abschließbarer Operator (vgl. Beispiel 4.22).

Den Abschluss von ∂_1 bezeichnen wir mit $\overline{\partial_1}$, und den neuen Definitionsbereich von $\overline{\partial_1}$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1((0,1))}$ nennen wir den *Sobolev-Raum* $H^1((0,1)) := (D(\overline{\partial_1}), \|\cdot\|_{H^1((0,1))})$, wobei

$$\|f\|_{H^1((0,1))} := \sqrt{\|f\|_{L^2((0,1))}^2 + \|\overline{\partial_1}f\|_{L^2((0,1))}^2} \quad \text{für } f \in H^1((0,1)).$$

(ii) Zeigen Sie dazu allgemein: Ist X ein Banachraum und $A : D(A) \rightarrow X$ ein abschließbarer Operator mit Abschluss $\overline{A} : D(\overline{A}) \rightarrow X$. Definiere $Y := (D(\overline{A}), \|\cdot\|_Y)$ mit der Norm

$$\|x\|_Y := \|x\|_X + \|\overline{A}x\|_X \quad \forall x \in Y.$$

Zeigen Sie: Dann ist Y vollständig.

(iii) Schließen Sie: $H^1((0,1))$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1((0,1))}$ vollständig.

(iv) Zeigen Sie, $H^1((0,1))$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1((0,1))}$ ein Hilbertraum.

(v)* Überlegen Sie sich eine ähnliche Konstruktion für die n -dimensionale Situation, d.h. definieren Sie den Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Falls Sie als Ausgangs-Definitionsbereich statt $C^1(\overline{\Omega})$ den Raum

$$C_0^1(\Omega) = \{f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n}) : f \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$$

nehmen, erhalten Sie den Raum $H_0^1(\Omega)$ - den Sobolev-Raum mit schwachen 0-Randwerten.

***Aufgabe 37** Zeigen Sie (einen Spezialfall der) Poincaré-Ungleichung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass für jedes $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n})$ mit $u \equiv 0$ auf dem $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$,

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dabei ist $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^T$ der Gradient.

Sie können dazu wie folgt vorgehen: Sei u wie oben gegeben.

(i) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \left(\int_{t=0}^1 |\nabla u(x + t(y-x))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \Omega$ gilt: $x + v \notin \Omega$.

(iii) Wählen Sie in der Ungleichung in (i) $y := x + v$ und schließen Sie, dass für alle $x \in \Omega$

$$|u(x)| \leq |v| \left(\int_{t=0}^1 |\nabla u(x + tv)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iv) Integrieren Sie die obige Ungleichung, um das Ergebnis zu erhalten.

Zeigen Sie, dass die Ungleichung auch für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt (siehe Aufgabe 36(v)).