

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 12 vom 13.05.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kommentare zur Verbesserung:					

Aufgabe 42 Zeigen Sie: Sei X ein \mathbb{C} -Banachraum und $A \in L(X)$. Dann sind die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig.

Sei also für $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ eine Folge von Eigenvektoren gegeben:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset X \setminus \{0\}$$

mit

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie dass $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein linear unabhängiges System ist.

Hinweis: Es bietet sich an, eine Induktion über n durchzuführen. Für den Induktionsschritt zeigen Sie: Gilt für gewisse $\alpha_j \in \mathbb{C}$, dass $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j = 0$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \alpha_j x_j = 0, \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{n+1} \alpha_j x_j = 0,$$

Subtrahieren Sie diese Aussagen um die Induktionsvoraussetzung anzuwenden.

Aufgabe 43 Gegeben sei der Hilbertraum $H = \ell^2(\mathbb{N})$ mit der üblichen ℓ^2 -Norm. Betrachten Sie den Shiftoperator $A : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \quad \text{für } (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Sei ausserdem $I : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ die Identität.

Zeigen Sie

- (i) $A \in L(H)$ und $\|A\|_{L(H)} = 1$.
- (ii) $A - I$ ist injektiv.
- (iii) Finden Sie die Folge $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ so dass $(A - I)x = (1, 0, 0, \dots)$ und zeigen Sie $x \notin \ell^2(\mathbb{N})$

(iv) $A - I$ ist nicht surjektiv.

(v) A ist nicht kompakt als Operator in $L(H)$.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ aus Aufgabe 28. Sie können z.B. die Aussage von Aufgabe 41(ii) verwenden.

***Aufgabe 44** Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Wir wissen, dass alle Eigenwerte von A reell sind. Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

und

$$\|A\|_{L(H)} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}. \quad (1)$$

Sie können wie folgt vorgehen:

(i) Setzen Sie $\gamma := \|A\|_{L(H)}$ und zeigen Sie mit Satz 7.7., dass

$$\gamma \geq \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

(ii) Für die andere Richtung konstruieren Sie unter Zuhilfenahme von Satz 7.7. eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$, $\|x_k\|_X = 1$ mit

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle Ax_k, x_k \rangle|,$$

$$\beta := \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ax_k, x_k \rangle$$

$$\|Ax_k\|_H \leq \gamma,$$

und

$$Ax_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y \quad \text{für ein } y \in H.$$

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\|Ax_k - \beta x_k\|_H^2 \leq 2\beta^2 - 2\beta \operatorname{Re} \langle Ax_k, x_k \rangle$$

(iv) Schließen Sie, dass $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ für ein $x \in H$, und $Ax = \beta x$.

(v) Folgern Sie, dass

$$\gamma \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

(vi) Zeigen Sie nun auch noch, dass

$$\gamma = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$
