A1 Ü1

1. · Symmetrie ✓ offensichtlich $\forall d_i$

$d_i(x,y) \geq 0$ ✓ , $d_i(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ klar

(d_0 ← Definition)

$i = 1,2,\infty$: $d_i(x,y) = 0 \Rightarrow x^k = y^k \ \forall i \Leftrightarrow x = y$.

· Dreiecksungleichung:

$$d_0(x,y) \leq d_0(x,z) + d_0(y,z)$$

Zwei Fälle: 1. $x = y \Rightarrow 0 \leq d_0(x,z) + d_0(y,z) \quad \forall x,y$.

2. $x \neq y \Rightarrow$ ~~mindestens~~ $x \neq z$ oder $x \neq y$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\Downarrow \\ d(x,z)\neq 0 \\ \shortparallel \\ 1}}{x \neq z} \qquad \underset{\substack{\Downarrow \\ d(x,y)\neq 0 \\ \shortparallel \\ 1}}{x \neq y}$$

$$1 \leq 1 + \overset{\geq 0}{d(x,y)}$$ ✓

oder $$d_0(x,z) + 1$$

$$\underset{0}{\vee\!\shortparallel}$$

$d_1(x,y)$: $\sum_i |x_i - y_i| \leq \sum_i (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)$ ✓

d_∞ $\max |x_i - y_i| \leq \max_i (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_i |x_i - z_i| + \max_j |y_j - z_j|$ ✓

d_1 analog.

d_2: Minkowski-Ungleichung für $p=2$

$\boxed{A2}$ (i) 1. Positivität:

$d(A,B) \geq 0$ ✓

$d(A,B) = 0 \Rightarrow \sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} |a-b| = 0$

$\Rightarrow \forall a \in A: \inf\limits_{b \in B} |a-b| = 0$

$\Rightarrow \forall a \in A \; \exists \, b_k \in B, \; b_k \xrightarrow{k \to \infty} a$

$\underset{B \text{ abgeschlossen}}{\Rightarrow} a \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B$

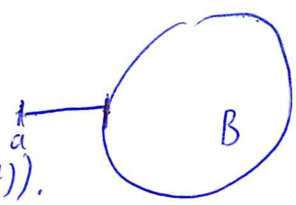
Analog $\sup\limits_{b \in B} \inf\limits_{a \in A} |a-b| = 0 \Rightarrow B \subseteq A$

$\Rightarrow d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

$\Leftarrow$ trivial.

~~(ii)~~ 2. Symmetrie klar. ✓

3. $\triangle$: Setze $d(a,B) := \inf\limits_{b \in B} |a-b|$.



Also $d(A,B) = \max\left(\sup\limits_{a \in A} d(a,B), \sup\limits_{b \in B} d(b,A)\right)$.

~~OBdA (4) $d(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B)$~~ ~~(sonst vertausche $A \leftrightarrow B$)~~

Es gilt:

(1) $$d(a,B) \le d(A,B) \qquad \forall a \in A \qquad [\text{klar}]$$

(2) $$d(a,B) \le d(a,c) + d(c,B) \qquad \cancel{\forall c \in C}\ \forall c$$

$$\le d(a,c) + d(C,B) \qquad \forall c \in C.$$

Wähle $c \in C$ s.d. $d(a,c) \to \inf_{c\in C} d(a,c)$ $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$

$$d(a,B) \le d(a,C) + d(C,B) \qquad \forall a \in A.$$

~~$\Rightarrow$ Nim sup $a \in A$:~~

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad d(a,B) \le d(A,C) + d(C,B) \qquad \underline{\forall a \in A}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sup_{a\in A} d(a,B)} \le d(A,C) + d(C,B)$$

Analog: $$\boxed{\sup_{b\in B} d(b,A)} \le d(A,C) + d(C,B)$$

$$\Downarrow$$

$$d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B). \qquad \square \text{ (i)}$$

(ii) Falls $\underset{\substack{\wedge \\ S}}{A}$ offen, dann ist $d(A,\bar{A}) = 0$ aber $\bar{A} \ne A$ ↯.

$$\Rightarrow \tilde{X} \ \underline{\text{kein}} \ \text{MR}.$$

A3 i) $\|x\|_i = 0 \overset{i=0,1,2,\infty}{\Longrightarrow} x = 0.$ (Positivität) ✓

Δ Folgt aus Δ für d_i ✓

Homogenität:

$i = 1, 2, \infty$ ✓ $d_i(\lambda x, 0) = |\lambda| \, d_i(x, 0).$

$$d_0(\lambda x, 0) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = d_0(x, 0) \quad ↯$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_i)$ ist NVR $\Leftrightarrow$ $i = 1, 2, \infty.$

(ii) Homogenität für $|||x|||_i$:

$$|||\lambda x|||_i \overset{!}{=} \|\lambda x - p\|_i$$

$\|$!

$$|\lambda| \, |||x|||_i = \lambda \|x - p\|_i = \|\lambda(x - p)\|_i .$$

$\Rightarrow$ Für $\lambda = 0$: $\|p\|_i = 0 \Rightarrow p = 0$ ist einzige Mgl. für $(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||_i)$ ein NVR.

(iii) $V = \{0\}$. ist <u>einziger</u> NVR mit $d_0(x,y) =: \|x - y\|$.

Falls $V \neq \{0\} \Rightarrow \exists \, v \in V \setminus \{0\}$,

$$1 = d_0(0, \lambda v) = \|\lambda v\| = |\lambda| \underset{\neq 0}{\|v\|} \quad ↯ \text{ für } \lambda \to 0.$$

A4)

- Positivität ✓
- Homogenität ✓
- Δ:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$
$$= 2\langle x, y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\leq 2\|x\|\,\|y\| + \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\leq (\|x\|+\|y\|)^2.$$