A5

$C^0([0,1])$ ist VR und L^∞-NORM IST NORM (da $[0,1]$ kompakt) ✓

z.Z. $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$ ist vollständig:

Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ C.F. in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$

(i) f_n ist gleichgradig stetig:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_k - f_l\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall k, l \geq N-1$ (*)

Wähle nun $\delta > 0$ so dass

(**) $|f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall |x-y| < \delta \quad \forall k = 1, \dots, N$

endlich viele!

Dann gilt $\forall |x-y| < \delta$, $k \in \mathbb{N}$

$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$ Falls $k \leq N$ $\Leftarrow$ (**)

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq \underbrace{|f_k(x) - f_N(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{4} \text{ (*)}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{4} \text{ (**)}} + \underbrace{|f_N(y) - f_k(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{4} \text{ (*)}}$$

$< \varepsilon.$

(ii) $g(x)$ existiert als punktweiser Limes, da $(f_k(x))_k$ C.F. in $\mathbb{R}$.

(iii) g ist stetig:

Für $\varepsilon > 0$ wähle wieder $N \in \mathbb{N}$ s.d. $(*)$ gilt.

~~Wähle k_1, k_2 so~~ Sei $\delta > 0$ aus der gleichgradigen Stetigkeit, s.d.

$(**)$ $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ $\forall |x-y| < \delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

~~Wähle~~ Für $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \delta$ ~~dann~~ $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ s.d. $(***)$ $|g(x) - f_{k_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$, $|g(y) - f_{k_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ ($k_1 = k_1(x)$, $k_2 = k_2(x)$)

$$\Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| \leq \underbrace{|g(x) - f_{k_1}(x)|}_{\overset{(***)}{<} \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|g(y) - f_{k_2}(y)|}_{\overset{(***)}{<} \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|f_{k_2}(x) - f_{k_2}(y)|}_{\overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|f_{k_2}(y) - f_{k_1}(y)|}_{\overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{4}}$$

$< \varepsilon.$

$\Rightarrow$ g stetig.

(iv) $\|f_n - g_n\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle N wie $(*)$. Für alle $n \geq N$:

Sei x_n so dass $\|f_n - g\|_{L^\infty} = |f_n(x_n) - g(x_n)|$ ($\Leftarrow$ Stetigkeit von g)

$\leq |f_n(x_n) - f_L(x_n)| + |f_L(x_n) - g(x_n)|$ $\forall L$

$\overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4} + |f_L(x_n) - g(x_n)|$ $\forall L \geq N$.

Nun $\exists$ ein $L = L(x_n)$ s.d. $|f_L(x_n) - g(x_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (da g punktweiser Limes)

$\Rightarrow$ $\|f_n - g\|_{L^\infty} < \varepsilon$

//

A6

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es gelte $\bar{A} = X$

Angenommen $\exists\, B_r(x)$ mit $B_r(x) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow X \setminus A \supseteq B_r(x)$

$\Rightarrow \text{int}(X \setminus A) \supseteq B_r(x)$

$\Rightarrow \underbrace{X \setminus \text{int}(X \setminus A)}_{\bar{A} = X} \cap B_r(x) = \emptyset$

↯ nach Vor.!

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ang. $\text{int}(X \setminus A) \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ kleiner Ball $B_r(x) \subseteq X \setminus A$.

$\Rightarrow B_r(x) \cap A = \emptyset$ ↯ Alle Bälle $\cap A \neq \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $x \in X$. Da $\text{int}(X \setminus A) = \emptyset$

Falls $x \notin A \Rightarrow \forall\, r > 0 : B_r(x) \not\subseteq X \setminus A$

$\Rightarrow B_r(x) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r$

Setze $r = \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ Sei $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$

$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \rightsquigarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in X$, da $\exists$ Folge $\underset{A}{x_n} \to x \Rightarrow x \in \bar{A}$. $\Rightarrow \bar{A} \supseteq X$

$\Rightarrow \bar{A} = X$

A7

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$\forall\, U_j \subseteq X$, offen und dicht $\forall j$ gelte $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ dicht.

Sei A_j abgeschlossen,

$A := \bigcup A_j$. Ang. int $A \neq \emptyset$

$\overset{\boxed{A6}}{\Rightarrow}$ ~~int A~~ A^c nicht dicht

Falls aber int $A_j = \emptyset$ $\forall j$

$\overset{\boxed{A6}}{\Rightarrow}$ A_j^c dicht.

Es gilt:

$A^c = \bigcap \underbrace{A_j^c}_{\text{offen, dicht}} \overset{(i)}{\Rightarrow} A^c$ dicht $\lightning$

Umkehrung genauso.

A8

(i) $O_j = \left\{ g \in C^0([0,1]) \, , \, \inf_{x \in [0,1]} \sup_{0<|h| \leq \frac{1}{j}} \frac{|g(x+h) - g(x)|}{|h|} > j \right\}$

O_j offen:

Sei $g_0 \in O_j$, dann gilt für ein $\delta > 0$

$$\forall x \in [0,1] \qquad \sup_{0<|h|<\frac{1}{j}} \frac{|g(x+h) - g(x)|}{|h|} > j + 2\delta.$$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad \exists \; |h_x| \in (0, \frac{1}{j})$

$$\frac{|g(x+h_x) - g(x)|}{|h_x|} > j + \delta$$

Wegen Stetigkeit von g gibt es dann auch einen kleinen Ball $B_{r_x}(x)$ s. d. $\forall y \in B_{r_x}(x)$

$$\frac{|g(y+h_x) - g(y)|}{|h_x|} > j + \delta$$

Die Menge $\bigcup_{x \in [0,1]} B_{r_x}(x) \supseteq \underset{\text{kompakt}}{\underset{\uparrow}{[0,1]}} \Rightarrow \exists$ endliche Teil-Überdeckung

$B_{r_1}(x_1), \; B_{r_2}(x_2), \; \ldots \; , \; B_{r_N}(x_n)$

Sei nun $f \in C^0([0,1])$ mit

$$\|f-g\|_{C^0} \le \frac{1}{4}\,\delta \min_{i=1,\dots,N} |h_{x_i}| \quad !! \quad h \in (0,\tfrac{1}{j})$$

$\forall y \in B_{r_i}(x_i)$ $\Rightarrow$

$$\frac{|f(y+h_{x_i}) - f(y_{x_i})|}{|h_{x_i}|}$$

$$\ge \frac{|g(y+h_{x_i}) - g(y_{x_i})|}{|h_{x_i}|} - \underbrace{\frac{1}{|h_{x_i}|}}_{\le \frac{1}{|h|}} 2\,\|f-g\|_{C^0}$$

$$\vee$$

$$(j+\delta) - \frac{1}{2}\delta = j + \frac{\delta}{2} > j.$$

$$\Rightarrow \forall y \in B_{r_i}(x_i): \quad \sup_{0<|h|<\frac{1}{j}} \frac{|f(y+h)-f(y)|}{|h|} > j$$

$\Rightarrow$ $f \in O_j.$

$\bigcup B_{r_i}(x_i) = [0,1]$

$\Rightarrow$ O_j offen $\square$

(ii) Dichtheit:

$f \in C^0([0,1])$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

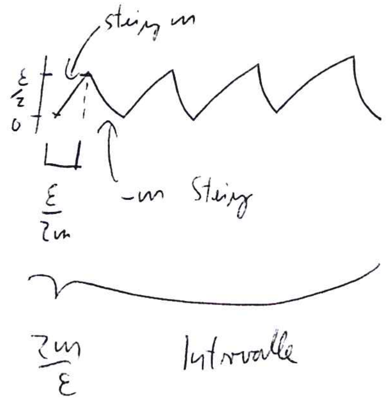
z.Z. $\exists\, g \in O_j$ mit $\|g-f\|_{L^\infty} < \varepsilon$.

Sei p Polynom s.d. $\|f-p\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Auf p fügen wir Zacken ein ("Stark genug")

Sei $m \geq j + \|p'\|_\infty$

Sei $z(x) :=$



$z($

$g := p - z$ dann gilt $\|g-f\| \leq \underbrace{\|g-p\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|z\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$

z.Z. $g \in O_j$.

$$\forall_{x \in [0,1]} \quad \frac{|g(x+h)-g(x)|}{|h|} \geq \frac{|z(x+h)-z(x)|}{|h|} - \underbrace{\frac{|p(x+h)-p(x)|}{|h|}}_{\leq \|p'\|_{L^\infty}}$$

$$\geq \frac{|z(x-h)-z(x)|}{|h|} - \|p'\|_{L^\infty}$$

$\boxed{\text{richtiges } h}$

$$= m - \|p'\|_{L^\infty} \geq j. \implies g \in O_j.$$

(iii) Sei $g \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} O_j$

Ang. $x_0 \in [0,1]$ und g diffbar

$$\Rightarrow_{\text{so}} \quad \frac{|g(x_0+h) - g(x_0)|}{h} \xrightarrow{h \downarrow 0} g'(x_0).$$

insbesondere $$\frac{|g(x_0+h) - g(x_0)|}{|h|} \leq |g'(x_0)| + 1$$

$\forall\, |h| < \delta_{\varepsilon}$, $\delta < \frac{1}{|g'(x_0)|+1}$

$$\Rightarrow \sup_{|h|<\delta} \frac{|g(x_0+h) - g(x_0)|}{|h|} < |g'(x_0)| + 1 \quad ↯$$

(iv) Baire: $\bigcap O_j$ dicht. $\square$