A 20

z. z.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 & \text{in } X \\ \\ \lim\limits_{k\to\infty} Ax_k = y & \text{in } Y \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$$

Da $0 \in D(A)$ gilt

$$\begin{array}{c} A0 = 0 \\ \shortparallel \\ \lim\limits_{k\to\infty} Ax_k \end{array}$$

Stetigkeit von A!

A 21:

Es gilt $\swarrow$ $f \in L(U, \mathbb{R})$

$$f(x) \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X \qquad \forall x \in U$$

$$\|f\|_{X^*}\|x\|_X = p(x)$$

Hahn-Banach $\Rightarrow$ $\exists F: X \to \mathbb{R}$ linear, $F|_U = f$

$$\circledast \quad F(x) \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Zu Zeigen: F stetig:

Wegen $F(-x) = -F(x)$ gilt

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} F(x) \overset{\circledast}{\leq} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|f\|_{X^*} \|x\|_X$$

$$= \|f\|_{X^*}.$$

$\square$

A22)

$$f^*(y) := t\|x\|_X^2 \quad \text{für} \quad y =: \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{t}\, x.$$

$$\sup_{\substack{\|y\|\leq 1\\ y\in U}} |f^*(y)| = \sup_{\substack{|t|\,\|x\|\leq 1\\ t\in\mathbb{R}}} |t|\,\|x\|_X^2 = \|x\|_X^2 \frac{1}{\|x\|_X} = \|x\|_X.$$

$$\Rightarrow \quad \|f^*\|_{L(U,\mathbb{R})}^2 = \|x\|_X^2$$

$$f^*(x) \underset{t=1}{=} \|x\|_X^2$$

und mit Korollar 5.3

$$\exists\, x^* \in X^* \quad \text{mit} \quad \|x^*\|_{X^*} = \|f^*\|_{U^*} = \|x\|_X$$

$$\text{und} \quad x^*(x) = f^*(x) = \|x\|_X^2$$

$\square$

A 23

linear unabhängig!

$\tilde{U} := \mathrm{span}(x_0, U)$

$\forall \tilde{u} \in \tilde{U} \quad \exists!\ t \in \mathbb{R},\ u \in U$ mit

$$\tilde{u} = t x_0 + u$$

$f(\tilde{u}) := t\,d$ linear ✓

$$\sup_{\substack{\tilde{u} \in \tilde{U} \\ \|\tilde{u}\|_X \le 1}} f(\tilde{u}) = d \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ u \in U \\ \|t x_0 + u\|_X \le 1}} |t|$$

$$= d \sup_{\substack{|t|\,\|x_0 + \frac{u}{t}\| \le 1 \\ t \in \mathbb{R},\ u \in U}} |t| = d \sup_{\substack{|t|\,\|x_0 - u\|_X \le 1 \\ t \in \mathbb{R} \\ u \in U}} |t| = d \sup_{u \in U} \frac{1}{\|x_0 - u\|}$$

U linearer UR

$$= \frac{d}{d} = 1$$ (gilt auch in (ii)) $\square$