A32 $\left(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty}\right)$ nicht separabel

Idee die gleiche wie bei l^∞: Finde diskrete überabzählbare Menge.

Achtung: $f = g$ in L^∞

$:\Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)$ fast alle x

also: einzelne Punkte zählen nicht!

Sei $x_n := 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

und $A_n := (x_n, x_{n+1})$

Es gilt: $A_n \subseteq (0,1)$ und

$A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m.$

Für $B \in 2^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge von $\mathbb{N}$) setze

$$f_B := \sum_{n \in B} \chi_{A_n}$$

charakteristische Fkt.

$\Rightarrow \|f_B\|_\infty = 1$, für $B \neq \emptyset$

$\|f_{B_1} - f_{B_2}\|_\infty = 1$, $B_1 \neq B_2$

$D := \{ f_B, \; B \in 2^{\mathbb{N}} \}$ ist diskret und überabzählbar

$\overset{\text{ÜAB1}}{\Longrightarrow}$ L^∞ nicht separabel!

A33

(i) $T_\varepsilon f := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f$ klar linear

$\Rightarrow |T_\varepsilon f| \leq \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \|T_\varepsilon\|_{(\ell^\infty)^*} \leq 1$

(ii) $g(x) = \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \chi_{[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})}$

$|g(x)| \leq 1$, $\forall x \approx \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}$: $g(x) = 1$

$\Rightarrow \|g\|_\infty = 1.$

(iii) $T_{\varepsilon_k} g = \frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{\varepsilon_k} g$

$= -\frac{1}{\varepsilon_k}\int_{\varepsilon_k}^{\varepsilon_{k+1}} g + \frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{\varepsilon_{k+1}} g$

$= -(-1)^k \frac{(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k)}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{\varepsilon_{k+1}} g$

$$\left| T_{\varepsilon_k} g - (-1)^k \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right)}_{= 1 - \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}} \right| \leq \underbrace{\|g\|_\infty}_{= 1} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$$

$$\Rightarrow \quad |T_{\varepsilon_k} g - (-1)^k|$$

$$\leq 2 \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \xrightarrow{k \to \infty} 0 .$$

(iv) Angenommen es existiert Teilfolge $T_{k_i} \xrightarrow{w^*} T$

Wähle $(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty \subseteq \left(\frac{1}{k_i}\right)_{i=1}^\infty$ mit obiger Eigenschaft (geht, da $\frac{1}{k_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$)

Da TF von konvergenten Folgen wieder konvergent sind

$\Rightarrow \quad T_{\varepsilon_k} \xrightarrow{w^*} T$ ↯ Wähle $g := g_{(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{\varepsilon_{2k}} g \to 1 \\ T_{\varepsilon_{2k-1}} g \to -1 \end{cases} \quad ↯ \; Tg = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

(v) Separabilität

A34

(i) Da $M \neq \emptyset$

$\exists \ (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ s.d. $F(x_k) \to \inf_M F(x)$:

Da $\inf_{x \in M} F(x) > -\infty$

wähle $x_k \in M$ s.d. $F(x_k) \leq \inf_M F + \frac{1}{k}$

($\exists$ nach Def. von inf)

(ii)

Angenommen $\exists$TF: $\|x_{k_i}\| \to \infty$

$\overset{\text{Koerzivität}}{\Rightarrow} F(x_{k_i}) \to \infty$

$\not\Downarrow$

$\inf_M F < \infty$ (da $M \neq \emptyset$)

(ii.) Da X reflexiv

+ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt

$\overset{\text{S.6.17.}}{\Rightarrow}$ $\underset{x_0 \in X}{\exists \text{ TF},} : x_{n_i} \xrightarrow{w} x_0 \in X$

(iv) Da M schwach folgenabgeschlossen ist

$\Rightarrow$ $x_0 \in M$.

(v) F ist schwach uhs

$\Rightarrow$

$$F(x_0) \leq \liminf_{i \to \infty} F(x_{n_i}) \overset{(i)}{=} \inf_M F \quad (*)$$

(vi) Da $x_0 \in M \Rightarrow$

$$F(x_0) \geq \inf_M F$$

$\overset{\text{mit } (*)}{\Rightarrow}$ $F(x_0) = \inf_M F.$ $\square$