Kapitel 1:

Strukturen:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Metrische Räume} & + & \text{VOLLSTÄNDIGKEIT} \\
\cup\!\text{I} & & \downarrow \\
\text{NORMIERTE RÄUME} & \rightarrow & \text{BANACH-RAUM} \\
\cup\!\text{I} & & \downarrow \\
\text{PRÄ-HILBERT-RÄUME} & \rightarrow & \text{HILBERT-RAUM}
\end{array}$$

Definition 1.1: (Metrik, Metrischer Raum)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

heißt Metrik falls $\forall x, y, z \in X$:

(a)	$d(x,y) = 0 \iff x = y$	(Positivität)
(b)	$d(x,y) = d(y,x)$	(Symmetrie)
(c)	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$	(Dreiecks-Ungleichung)

Das Paar (X,d) heißt metrischer Raum (MR)

Beispiel 1.2

- Sei $X = \mathbb{R}^n$, oder $X = \mathbb{Q}^n$, oder $X = \mathbb{C}^n$,

dann ist X mit der Metrik d_1, d_2, d_∞ ein MR.

$$d_1(x,y) := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

$$d_2(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x,y) := \max_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|$$

(diskrete Metrik) $$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}.$$

$\boxed{\text{Ü}}$

- Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

$$X := \{ A \subset S \mid A \neq \emptyset,\ A \text{ abgeschlossen} \}$$

und für $A, B \in S$

$$d(A,B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d_2(a,b),\ \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d_2(a,b) \right\}$$

A (Hausdorff-Metrik).

Def. 1.3 Sei (X,d) MR, $x \in X$, $r > 0$ beliebig

- $B_r(x)$ offene Ball :

$$B_r(x) = \{ y \in X : \ d(x,y) < r \}$$

!

- $x \in A$ heißt innerer Punkt einer Menge A, falls

  $\exists \ r > 0$ so dass $B_r(x) \subseteq A$.

- Menge der inneren Punkte / das Innere von $A \subseteq X$:

  $A^{\circ} \equiv \operatorname{int} A = \{ x \in A : \ x \text{ ist innerer Punkt von } A \}$

- $A \subset X$ offen : $\cdot$ Alle Punkte $x \in A$ sind innere Punkte

  $\Leftrightarrow \cdot$ $A = \operatorname{int} A$.

- $A \subset X$ abgeschlossen: $A^c = X \setminus A$ ist offen

  Komplement

- $U \subset X$ heißt (offene) Umgebung von $x \in X$, falls $x \in U$ und U offen.

- **Abschluss** von $A \subseteq X$:

$$X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A).$$

- **Dichtheit** Die Menge A liegt dicht in X falls $A \subseteq X$ und $\bar{A} = X$.

- **Bemerkungen 1.4:**
  - X, $\emptyset$ offen und abgeschlossen
  - $A^\circ = \bigcup_{\substack{B \text{ offen} \\ B \subseteq A}} B$ "die größte offene Teilmenge von A"
  - $\bar{A} = \bigcap_{\substack{B \text{ abgeschlossen} \\ B \supseteq A}} B$ "die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Def 1.5: Sei (X,d) ein MR.

Wir sagen $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ konvergiert gegen ein $x \in X$, ~~falls~~

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in (X,d),

falls $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Satz 1.6. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

$A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$x_n \in A$ und $x_n \to x \in X$

gilt: $x \in A$.

~~Def.~~

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei A abgeschlossen, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, $x_n \to x \in X$.

z. Z. $x \in A$.

Angenommen $x \notin A \Rightarrow x \in A^c$ ← offen nach Def. A abgeschl.

$\overset{A^c \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A^c$

$\overset{x_n \in A}{\Rightarrow}$ $d(x_n, x) > r$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$ $x_n \to x$.

"$\Leftarrow$" Selbst.

Def. 1.7 (Cauchy Folge, Vollständigkeit)

(vgl. Ana I)

Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, (X,d) MR, heißt **Cauchy Folge**

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N.$

Wie üblich impliziert $x_n \longrightarrow x$ dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine C.F. ist.

Die Umkehrung ist i.A. falsch (z.B. $\underset{\hat{\mathbb{Q}}}{x_n} \longrightarrow \sqrt{2}$ ist C.F. in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$)

Falls (X,d) MR mit $\forall$ C.F. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\exists x : x_n \longrightarrow x$

so heißt (X,d) **vollständiger** MR

Achtung: $[0,1)$ ist
- abgeschlossen im MR $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, |\cdot|)$
- nicht abgeschlossen im MR $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$([0,1), |\cdot|)$ ist kein vollständiger MR.

Normierte Räume, Banach-Räume:

Def. 1.8 (Normierter Vektorraum):

Sei X ein VR (über $\mathbb{R}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt Norm, falls:

(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positivität)

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (positive Homogenität)

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in X$ (Dreiecksungleichung)

Sowas gibts nicht bei MR!

Falls $\|\cdot\|$ eine Norm ist, dann ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Beispiel 1.9:

- $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) =$ Menge aller beschränkter Folgen $(x_n)_{n=1}^\infty$

  mit $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell^\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

  ist NVR.

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig. Setze

  $$C(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;,\; f \text{ stetig in } \Omega \}$$

  $$C_b(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;,\; f \text{ beschränkt, d.h. } \sup_{\Omega} |f| < \infty \}$$

und $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Dann • ist $(C_b(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter VR.

• aber $(C(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ i. A. nicht, da z. B.

$\Omega = (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig

aber $\|f\|_\infty = \infty$.

• falls Ω kompakt ist, ist $(C(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein NVR.

• Sei $L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \}$

wobei wir $f = g \iff f(x) = g(x)$ fast überall,

und

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lebesgue-Maß

Dann ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ein NVR. ~~aber auch~~

Satz 1.10:

Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X.

Dann ist (X,d) ein MR mit $d(x,y) := \|x-y\|$.

Die Umkehrung ist falsch (z.B. diskrete Metrik).

Beweis: Klar!

~~Def 1.10~~

Def 1.11 $d(x,y) := \|x-y\|$ heißt die induzierte Metrik (aus $\|\cdot\|$

Def. 1.12 (Banach-Raum)

Ein Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig (und dann Banach-Raum)

Falls X bezüglich der von $\|\cdot\|$ induzierten Metrik

vollständig ist.

Beispiel 1.13

Sei $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$, $1 \le p < \infty$ die Menge aller Zahlenfolgen

$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ so dass $\|x\|_{\ell^p} < \infty$

$$\|x\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| & p = \infty \end{cases}$$

Dann ist $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^p})$ ein Banach-Raum.

- Für die Dreiecksungleichung von $\|\cdot\|_{\ell^p}$ benötigen wir die wichtigen Tools:

Lemma 1.14 (YOUNGSCHE UNGLEICHUNG)

Sei $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b > 0$ dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemma 1.15 (Hölder'sche Ungleichung)

Sei $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_j) \in \ell^p$ $(y_j) \in \ell^q$.

Dann gilt $(x_j y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^1$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Die Dreiecks-Ungleichung für ℓ^p heißt

Lemma 1.16 (Minkowski-Ungleichung)

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

[OHNE BEWEIS]

Prä-Hilbertraum, Hilbert-Raum, Skalarprodukt:

Def. 1.17 (Skalarprodukt, Prä-Hilbertraum, Hilbertraum)

Sei X ein ($\mathbb{R}$-) Vektorraum. Eine Abbildung

$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt (inneres Produkt) auf X,

(a) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$

$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

(b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in X.$

(c) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

(d) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X$.

$(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ heißt dann ein Prä-Hilbert-Raum.

Lemma 1.18 (Cauchy-Schwartz Ungleichung)

Sei $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum.

$\forall x, y \in X: \quad \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$

[Beweis später]

Lemma 1.19

Sei $(X, <\cdot,\cdot>)$ ein PRÄ-HILBERTRAUM.

Dann ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein NVR für die NORM.

$$\|x\|_X := \sqrt{<x,x>}$$

$\|\cdot\|_X$ ist die aus $<\cdot,\cdot>_X$ induzierte Norm

Def. 1.20

Ist $(X, <\cdot,\cdot>)$ vollständig (also ein Banach-RAUM)

so heißt X ein Hilbert-RAUM.