4. Stetige, lineare Abbildung

Def. 4.1 (Lineare Abb.)

Seien

$$(X, \|\cdot\|_X), \quad (Y, \|\cdot\|_Y) \quad \text{NVR und } A: X \to Y.$$

A heißt lineare Abbildung falls

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 \in X.$$

Bsp: Taylor-Entwicklung $F(x) \approx DF(0) \cdot x$

Satz 4.2:

Es ist äquivalent für A eine lineare Abbildung von $(X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$

(i) A ist stetig in $0 \in X$

klar

(ii) A ist stetig in x_0 $\forall x_0 \in X$.

klar

(iii) A ist gleichmäßig stetig auf X

klar

(iv) A ist Lipschitz stetig

(v) $\sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y < \infty$ ("Beschränktheit")

Beweis:

(v) $\Rightarrow$ (iv)

OE $x_1 \neq x_2$

Linearität

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y = \|A(x_1-x_2)\|_Y = \left\|A\left(\frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|_X}\|x_1-x_2\|_X\right)\right\|_Y$$

$$= \|x_1-x_2\|_X \, \Big\|A\underbrace{\left(\frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|_X}\right)}_{\|\cdot\|_X \leq 1}\Big\|$$

$$\overset{(v)}{\leq} \|x_1-x_2\| \underbrace{\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|}_{\overset{!!}{=} L < \infty} = L\|x_1-x_2\|$$

$\Rightarrow$ A Lipschitz.

(i) $\Rightarrow$ (v)

($\neg$(v) $\Rightarrow$ $\neg$(i))

Angenommen $\sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Ax\|_Y = \infty$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in X, \; \|x_n\| \leq 1$ mit $\|Ax_n\|_Y \to \infty$.

- $z_n := \frac{x_n}{\|Ax_n\|_Y} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (\|x_n\|_X \leq 1, \; \|Ax_n\|_Y \to \infty)$

- aber $\|Az_n\|_Y = 1 \quad \forall n$, also insbes. $Az_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

- $A0 = 0Av = 0$.

$\Rightarrow$ A nicht stetig in 0.

Bsp 4.3

$$' : \left(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1} = \|f\|_{C^0([0,1])} + \|f'\|_{C^0([0,1])}\right) \longrightarrow C^0([0,1])$$

$$f \longmapsto f'$$

ist linear ✓

$$\cdot \; \|f'\|_{C^0([0,1])} \equiv \|f'\|_{C^0([0,1])} \leq \|f\|_{C^0([0,1])} + \|f'\|_{C^0([0,1])} = \|f\|_{C^1([0,1])}$$

$$\Rightarrow \sup_{\|f\|_{C^1([0,1])} \leq 1} \|f'\| \leq 1 \quad \leadsto \quad ' \text{ beschränkt, stetig.}$$

Def. 4.4: (Raum der beschränkten linearen Abbildungen)
↳ "bounded"

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NVR

$$L(X,Y) = \{ A : X \to V \text{ linear und beschränkt, d.h. } \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y < \infty \}$$

ist mit

- $\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y$ ein NVR.

- $L(X,X) =: L(X)$

- $X^* := L(X, \mathbb{R})$ ↳ Funktionale

- Falls $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banach-Raum $\Rightarrow$ $L(X,Y)$ Banach-Raum.

Satz 4.5

X, Y, Z NVR, $A \in L(X,Y)$ $B \in L(Y,Z)$

$$\Rightarrow \quad BA \in L(X,Z)$$

$$\left\ulcorner BAx := B(\underset{\substack{\uparrow \\ Y}}{Ax}) \right\lrcorner$$

Insbesondere: $A \in L(X) \Rightarrow A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{\substack{k \text{ mal} \\ \uparrow \\ \mathbb{N}.}} \in L(X)$

Beweis:

$$\|BA\|_{L(X,Z)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|BAx\|_Z = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|B \underbrace{\frac{Ax}{\|Ax\|_Y}}\|_Z \|Ax\|_Y$$

$$\le \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \left(\sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\| \le 1}} \|By\|_Z \|Ax\|_Y \right)$$

$$\le \|B\|_{L(Y,Z)} \|A\|_{L(X,Y)}$$

Satz 4.6. (Reihen)

Sei Y BR, $A_j \in L(X,Y)$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} < \infty . \quad (\#)$$

Dann ist $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} A_j := \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} A_j}_{\in L(X,Y)} \in L(X,Y).$

Beweis:

Für $S_N := \displaystyle\sum_{j=1}^{N} A_j$, $M < N$

$$S_N - S_M = \sum_{j=M+1}^{N} A_j \in L(X,Y)$$

und $\|S_N - S_M\| \leq \displaystyle\sum_{j=M+1}^{N} \|A_j\|$

C.F. $(\#)$

$\Rightarrow$ S_N ist C.F. $\Rightarrow$ S_N konvergiert.

$L(X,Y)$ vollständig

BR!

Beispiel 4.7

i) X BR, $A \in L(X)$, dann

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad \in L(X)$$

⌈ Beweis: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\|_{L(X)} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k_{L(X)}}_{= \exp(\|A\|_{L(X)})} < \infty$ ⌋

ii) Neumann-Reihe:

$\|A\|_{L(X)} < 1$, dann ist

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Identität}}}{I} - A$ invertierbar, und es gilt

$$(I - A)^{-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} A^k}_{\text{konvergiert } \checkmark}$$

⌈ Beweis

$$(I-A) \sum_{k=0}^{N} A^k = \sum_{k=0}^{N} A^k - \sum_{k=0}^{N} A^{k+1} \overset{\text{Teleskop}}{=} \cancel{I} - A^{N+1} + \underset{= A^0}{I}$$

und $\|A^{N+1}\|_{L(X)} \leq \|A\|^{N+1}_{L(X)} \longrightarrow 0$ ⌈ $\|A\| < 1$.