4.2 GLEICHMÄßIGE BESCHRÄNKTHEIT

Satz 4.8 (Banach-Steinhaus / UNIFORM BOUNDEDNESS PRINCIPLE)

Sei X vollständig, $L(X,Y) \supseteq (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Menge beschränkter Abbildungen.

Falls $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt, also

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda x\|_Y < \infty \qquad \forall x \in X,$$

Dann folgt auch glm. beschränktheit, d.h.

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda\|_{L(X,Y)} < \infty.$$

Bew: Definiere $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ~~via~~ $: X \to \mathbb{R}$ via

$$f_\lambda(x) := \|A_\lambda x\|_Y \quad , \quad x\in X.$$

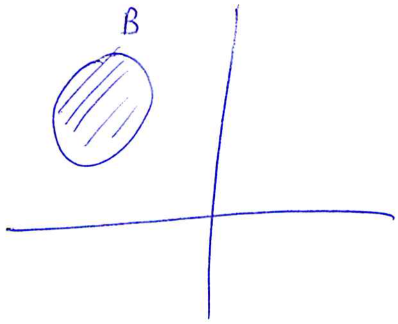
$\Rightarrow$ $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist punktweise beschränkt.

X vollständig!

$\Rightarrow$ Satz 2.7 $\Rightarrow$ $\exists$ offener Ball $B \subset X$ mit $\quad = B_r(x_0)$

Anwendung Baire!

$$\sup_{\lambda\in\Lambda, x\in B} |f_\lambda(x)| < \infty.$$



Wir schließen mit Translation + Skalierung

Sei $\|x\|_X < 1$. $\boxed{x = \frac{1}{r}\left((x_0 + rx) - x_0\right)}$

$$A_\lambda(x) = \frac{1}{r}\left(A_\lambda\underbrace{(x_0 + rx)}_{\in B}\right) - A_\lambda(x_0)$$

$\uparrow$ linear!

$$\Rightarrow \|A_\lambda(x)\|_Y \leq \frac{1}{r} \|A_\lambda \underbrace{(x_0 + rx)}_{\overset{\shortparallel}{\tilde{x} \in B}}\|_Y + \frac{1}{r} \|A_\lambda(x_0)\|_Y$$

punktweise beschränkt

$$\leq \frac{1}{r} \sup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \tilde{x} \in B}} \|A_\lambda(\tilde{x})\| + \sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda x_0\|_Y$$

$\wedge$ ⇐ Satz 2.7.

∞

$$\Rightarrow \sup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \|x\|_X < 1}} \|A_\lambda(x)\|_Y < \infty.$$

$\shortparallel$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A\|_{L(X,Y)}$$

□

Korollar 4.9:

Sei X vollständig, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$, $A_j \to A$ punktweise in $L(X,Y)$,

d.h. $\exists\, A : X \to Y$ s.d. $\forall\, x \in X$

$$\lim_{j\to\infty} A_j(x) = A(x). \quad (*)$$

Dann ist $A \in L(X,Y)$ (i.e. linear & stetig) und

$$\|A\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{j\to\infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} =: M < \infty$$

($\leadsto$ Fatou)

Beweis

$(*) \Rightarrow (A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise beschränkt

$$\underset{\text{S.4.8.}}{\Rightarrow} \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} \|A_j\|_{L(X,Y)} < \infty.$$

Sei $j \to \infty$ TF s.d. $\|A_j\|_{L(X,Y)} \longrightarrow M < \infty$.

Es gilt $A_j x \longrightarrow Ax$ auch für die Teilfolge. Insbesondere

klar: A linear & $\forall\, \|x\| \leq 1$

$$\|Ax\|_Y = \lim_{j\to\infty} \|A_j x\|_Y \underset{\text{TF}}{\leq} \lim_{j\to\infty} \|A_j\|_{L(X,Y)} = M.$$

$$\Rightarrow \quad \sup \|A\|_{L(X,Y)} \leq M.$$

$\square$

4.3 SATZ DER OFFENEN ABBILDUNG / OPEN MAPPING THM

X, Y NVR, $\quad A: X \to Y$ linear.

Def. 4.10. A heißt offen, falls

$$\forall\, U \subseteq X \text{ offen gilt } A(U) \text{ offen.}$$

Satz 4.11 (OPEN MAPPING THM)

X, Y Banach-Räume, $A \in L(X,Y)$.

(i) A offen $\Longleftrightarrow$ A surjektiv.

(ii) A bijektiv $\Rightarrow$ $A^{-1} \in L(X,Y)$. $\longrightarrow \boxed{\text{Ü}}$

Bew.: (i) "$\Rightarrow$" Falls A nicht surjektiv

$\Rightarrow$ $A(X)$ ist linearer strikter Unterraum von Y

$\Rightarrow$ $A(X)$ ist nicht offen. $\boxed{\text{Ü}}$

"$\Leftarrow$" Sei also A surjektiv.

Schritt 1: Zeige $\exists\, r > 0$ s.d.

$$\overline{A(B_1^X(0))} \supseteq B_{2r}(0). \qquad (*)$$

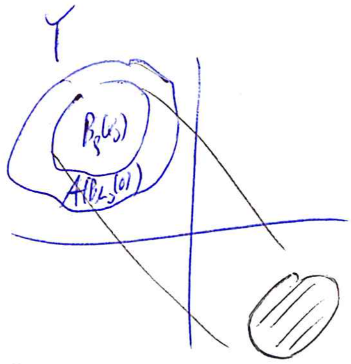
Dazu betrachte

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A(B_k(0))} \quad \underset{\substack{Y \text{ vollst.} \\ \text{Satz v. Baire}}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, k_0 \text{ s.d. } \operatorname{int} \overline{A(B_{k_0}(0))} \neq \emptyset$$

also ex. $\varrho_0 > 0$, $x_0 \in X$ mit

$$\overline{A_{k_0}(B_{k_0}(0))} \supseteq B_{\varrho_0}(x_0).$$

↑ ist konvex ⇝ $x_0 = 0$ wählen:



~~$\forall \lambda > 0$:~~

$$\cancel{A_{k_0}(B_{\lambda k_0}(0)) \supseteq B_{\lambda \varrho_0}(0) + \lambda x_0}$$

$$\underset{\text{Linearität}}{\Longrightarrow} \quad -B_{\varrho_0}(x_0) \subseteq \overline{A_{k_0}(B_{k_0}(0))}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda B_\varrho(x_0) + (1-\lambda)(-B_\varrho(x_0)) \subseteq \overline{A_{k_0}(B_{k_0}(0))} \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

$$\underset{\lambda := \frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\tfrac{1}{2} B_\varrho(x_0) - \tfrac{1}{2} B_\varrho(x_0)}_{\text{offen, enthält } 0} \subseteq \overline{A_{k_0}(B_{k_0}(0))}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \tilde{r} > 0 \text{ s.d. } B^Y_{\tilde{r}}(0) \subseteq \overline{A_{k_0}(B_{k_0}(0))}$$

⇝ Skalierung

$$B_{2r}(0) \subseteq \overline{A(B^X_1(0))}$$

Tatsächlich gilt

$$\text{(**)} \qquad \overline{A(B_R^X(0))} \supseteq B_{2Rr}(0) \qquad \forall R > 0.$$

Schritt 2

$$A(B_1(0)) \supseteq B_r(0).$$

Sei also $y \in B_r(0)$.

Ziel: Finde $x \in B_1(0)$ s.d. $Ax = y$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} \quad \exists\, x_1 \in B^X_{\frac{1}{2}}(0) \quad \text{mit}$$

$$\|\underbrace{Ax_1 - y}\|_Y < \frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, x_2 \in B^X_{\frac{1}{4}}(0)$$

$$\|Ax_2 + Ax_1 - y\|_Y < \frac{r}{4}$$

$$\vdots$$

$$\left\| A\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - y \right\|_Y < \frac{r}{2^n} \qquad x_i \in B_{2^{-i}}(0) \subseteq X,$$

mit

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_X < \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X < 1$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \text{ ist C.F.} \quad \underset{X \text{ BR}}{\Rightarrow} \quad x = \sum_{i=1}^\infty x_i \in X.$$

~~und $Ax = \sum_{i=1}^\infty Ax_i$~~

und $Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Ax_i$

$$\Rightarrow \|Ax - y\|_Y = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|A \sum_{i=1}^{n} x_i - y\|_Y}_{\le \frac{r}{2^n}} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{Ax = y}$$

$$\Rightarrow A(B_1(0)) \supseteq B_r(0). \Rightarrow \boxed{A(B_R(0)) \supseteq B_{Rr}(0)) \ \forall R>}$$

<u>Schritt 3</u> A offen:

Sei $U \subseteq X$ offen, $y_0 \in A(U)$. ZZ.

$\exists x_0 \in U: \ y_0 = Ax_0 \overset{U \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq U$

$$\overset{\text{Schritt 2}}{\Rightarrow} A(B_\delta(0)) \supseteq B_{\frac{1}{\delta}}(0)$$

$$\Rightarrow \underline{A(B_\delta(x_0))} = A(B_\delta(0)) + Ax_0$$

$$\supseteq B_{\frac{1}{\delta}}(0) + y_0 = \underline{B_{\frac{1}{\delta}}(y_0)}$$

$$\Rightarrow y_0 \in \operatorname{int} A(B_\delta(x_0)).$$

//