4.4 Satz vom abgeschlossenen Graphen:

$$A: \quad \underbrace{D(A)}_{\text{linearer Unterraum}} \subseteq X \longrightarrow Y \quad \text{linear}$$

NVR

$$\Gamma_A \equiv \text{Graph } A = \{(x, Ax), \ x \in D(A)\} \subseteq X \times Y$$

<u>Def. 4.12</u> (Abgeschlossener Operator)

A heißt abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Graph $A \equiv \Gamma_A$ abgeschlossen in $(X \times Y, \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y)$

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|\cdot\|_Y$$

<u>Bsp 4.13</u> $A \in L(X,Y)$ (insbes. $D(A) = X$) $\Rightarrow$ A abgeschlossen

<u>Bew:</u> $\boxed{\text{Ü}}$ Achtung $(x_n, y_n) \in \Gamma_A$ z.z. $x_n \to x \in X$, $y_n \to y \in Y$

$\Rightarrow \quad Ax = y.$

Satz 4.14 (Closed Graph Thm / Abgeschlossene Graph)

$A: X \to Y$, X, Y BR , dann

$$A \in L(X,Y) \iff A \text{ abgeschlossen.}$$

falls X, Y BR reicht für check $A \in L(X,Y)$ also "$x_n \to x$ & $Ax_n \to y \Rightarrow Ax = y$" aus.

Bew

"$\Rightarrow$" siehe [Ü] / Bsp. 4.13

"$\Leftarrow$" • $(\Gamma_A, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist BR:

In der Tat: $(X\times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist BR, $\hookrightarrow \|x\|_X + \|y\|_Y$

$\Gamma_A \subseteq X\times Y$ abgeschlossen (nach Vor)

$\Rightarrow \Gamma_A$ vollständiger TR von $X\times Y$.

Betrachte $\Pi_X : \underset{X\times Y}{\overset{\in}{(x,y)}} \longmapsto x \in X$

$\Pi_Y : (x,y) \longmapsto y \in Y$

sind lineare Operatoren, stetig.

$$\Pi_X : \underbrace{\Gamma(A)}_{\{(x,Ax),\, x\in X\}} \longrightarrow X \quad \text{ist injektiv + surjektiv}$$

BR

OPEN MAPPING THM
$\Rightarrow$
Satz 4.11 (ii)

$$\Pi_X^{-1} \in L(X, \Gamma(A)).$$

Es gilt nun $A = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1} \in L(X, Y)$ //

$$x \overset{\Pi_X^{-1}}{\longmapsto} (x, Ax) \overset{\Pi_Y}{\longmapsto} Ax$$

$\square$

<u>Korollar 4.15</u> (Hellinger-Töplitz)

Sei $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ HR, $A: H \to H$ linear, symmetrisch

$$\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle \quad \forall\, x, y \in H.$$

$\Rightarrow$ A stetig, $A \in L(H)$.

Beweis: Zeige Γ_A abgeschlossen, also:

Sei $x_n \longrightarrow x \in H$, $y_n = Ax_n \longrightarrow y$ in H

z. Z. $\underline{Ax = y}$ $\left(\overset{S.4.14}{\Longrightarrow} A \in L(H)\right)$.

$\forall z \in H$ gilt:

$$(Ax_n, z) = (y_n, z) \xrightarrow{n\to\infty} (y, z)$$

$$\| \text{Sym.}$$

$$(x_n, Az) \xrightarrow{n\to\infty} (x, Az) \overset{\text{Sym.}}{=} (Ax, z)$$

$$\Rightarrow \quad (y, z) = (Ax, z) \quad \forall z \in H$$

$$\Leftrightarrow \quad (y - Ax, z) = 0 \quad \forall z \in H$$

$\overset{z := y - Ax \in H}{\Longrightarrow}$ $(y - Ax, y - Ax) = 0$

$$\| $$

$$\|y - Ax\|_H^2 \Rightarrow y = Ax.$$

$\square$

Vorteil Abgeschlossenheit:

$\exists$ Operator $A: D(A) \xrightarrow{\subseteq X} Y$ s.d.

$$A \notin L(D(A), Y) \quad (A \text{ unbeschränkt})$$

aber A ~~nicht~~ abgeschlossen

(Bsp. $\frac{d}{dt} : D() \subseteq C^0([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1])$) $\boxed{\text{Ü}}$

Wir können aber immer noch Eigenschaften retten, z.B.

Satz 4.16 (Satz von stetiger Inversen) vgl. S.4.11 (ii)

X, Y BR, $A: D(A) \subseteq X \to Y$ linear + abgeschlossen + bijektiv

Dann $\exists$ $B = A^{-1} \in L(Y, X)$ mit $AB = id|_Y$

$BA = id|_{D(A)}$

Bew: $\boxed{\text{Ü}}$ (vgl. S. 4.14)

4.5 Abschließen von Operatoren

X, Y NVR, $\Gamma \subseteq X \times Y$ ein linearer Unterraum

Def 4.17 (linearer Graph)

Γ ist linearer Graph falls

- $(x, y_1) \in \Gamma$, $(x, y_2) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2$

bzw.

- $(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0$

Satz 4.18

(i) Falls $A: \overset{\text{lin. UR}}{D(A)} \subseteq X \to Y$ linear $\Rightarrow \Gamma_A$ linearer Graph

(ii) $\Gamma \subseteq X \times Y$ linearer Graph $\Rightarrow \exists! B: D(B) \subseteq X \to Y$ mit $\Gamma_B = \Gamma$.

Bew: (i) klar: $\underbrace{y_1 = A0}_{(0,y) \in \Gamma_A} \Rightarrow y = 0$

(ii) $D(A) := \Pi_X(\Gamma)$

Projektion auf 1. Komponente in X.

$$Ax := \Pi_Y(\{x\} \times Y) \cap \Gamma \quad , x \in D(A).$$

: ein Element, da linearer Graph.

Def. 4.19 B heißt Erweiterung von A

$$:\Leftrightarrow \Gamma_B \supseteq \Gamma_A.$$

$$\Leftrightarrow D(A) \subseteq D(B) \quad \text{und } B|_{D(A)} = A.$$

Def. 4.20 A heißt abschliessbar falls $\overline{\Gamma_A}^{X\times Y}$ linearer Graph.

Der zugehörige Operator $\overline{A}$, $\Gamma_{\overline{A}} := \overline{\Gamma_A}$

Abschluss von A

Es gilt $D(A) \subseteq D(\overline{A}) \subseteq \overline{D(A)}$

im Allg. strikt!

Satz 4.21:

A ist abschließbar $\Leftrightarrow$ $\forall\ (x_n, y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Gamma_A$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to 0 \\ y_n = Ax_n \\ y_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0.$$

Beweis

$\overline{\Gamma}_A$ linearer graph

$\iff \forall y \in Y$ mit $(0,y) \in \overline{\Gamma}_A$ gilt $y=0$.

$$\iff \forall \underset{\Gamma_A}{\underset{\Uparrow}{(x_n, y_n)}} \longrightarrow (0,y) \quad \text{gilt} \quad y=0$$

$$\iff \forall \underset{A}{(x_n, y_n)} \longrightarrow (0,y) \quad , \quad y_n = A x_n$$

gilt $y=0$.

Bsp 4.22

- Nicht - abschließbarer Operator:

$$X = L^2(\mathbb{R}), \quad Y = \mathbb{R}$$

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \qquad \forall f \in D(A).$$

$$D(A) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), \ \operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R} \}$$

Sei $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \Rightarrow A f_n = \frac{1}{n} \int_0^n 1 \, dt = 1.$

$$\| f_n \|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_0^n \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Also $A f_n \longrightarrow 1$ in $\mathbb{R}$

$f_n \longrightarrow 0$ in L^2

$\Rightarrow$ A nicht abschließbar

- $\Delta : \underbrace{C_0^\infty(\Omega)}_{D(\Delta)} \subseteq L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$

ist abschließbar:

- $u_k \xrightarrow{\in D(\Delta)} 0$ in L^2

$f_k = \Delta u_k \longrightarrow g$ in L^2

$\Rightarrow \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \varphi \, \Delta u_k \overset{\text{P.I.}}{=} -\int_\Omega \nabla\varphi \, \nabla u_k = \int \Delta\varphi \, u_k$$

$$\Big\downarrow k \to \infty \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow k \to \infty$$

$$\int_\Omega \varphi g \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \varphi \underset{L^2}{\underset{\Uparrow}{g}} = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

$C_0^\infty(\Omega)$ dicht in L^2 $\Rightarrow$ $\| \varphi_k - g \|_{L^2} \leq \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int f_k\, g = \int (f_k - g)\, g + \int |g|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int |g|^2 = \int |(f_k - g)|\,|g|$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int |f_k - g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|f_k - g\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \frac{1}{k}} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|g\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \quad g \equiv 0.$$

$$D(\bar{\Delta}) = \text{Sobolev-Raum } H^2(\Omega)$$