6 Reflexivität, Separabilität, Schwach*-Konvergenz & Kompaktheit

6.1. Reflexivität

$(X, \|\cdot\|_X)$ NVR, X^* Dualraum.

Def. 6.2 (Bidualraum):

$X^{**} = (X^*)^*$ heißt Bidualraum von X

Satz 6.3

$x \in X$ kann kanonisch einem Element in $x^{**} \in X^{**}$ zugeordnet werden:

$$x^{**}(\ell) := \ell(x). \qquad \ell \in X^*$$

Die kanonische Zuordnung $I : x \longmapsto x^{**}$ ist lineare Isometrie.

Bew: $\boxed{\text{Ü}}$

Def. 6.4.

X reflexiv $:\Leftrightarrow$ I ist surjektiv ($\Leftrightarrow$ I ist isometrischer Isomorphismus)

$I : X \to X^{**}$

Bsp: 6.5

(i) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind reflexiv in jeder Norm!

(ii) Jeder HR $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ist reflexiv

Ü (JEDER $(X, \|\cdot\|_X)$ BR dessen Norm äquivalent ist zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$-HR struktur)

(iii) $L^p(\Omega)$ reflexiv $1 < p < \infty$

(iv) $L^1(\Omega)$ nicht reflexiv!

Bew (ii)

Satz 5.9.

sei $J : H \longrightarrow H^*$, $x \longmapsto \langle x, \cdot \rangle$ ist lineare Isometrie, Isomorphi (Satz 5.8)

H^* ist HR mit Skalarprodukt

$$\langle J(x), J(y) \rangle_{H^*} := \langle x, y \rangle_H \qquad \forall\, \ell = J(x),\ h = J(y) \in H^*$$

$\Rightarrow$ $\exists$ der isometrische Isomorphismus

$$J^* : H^* \longrightarrow H^{**}.$$

Beh. $\underline{I = J^*(J)}$ $\quad y \in H$, $\ell \in H^*$, $x \in H$ s.d. $Jx = \ell$

$$\underset{\in H^{**}}{(Iy)}(\ell) = (Iy)(Jx) \underset{\text{Def. } I}{=} (Jx)(y) = \langle x, y \rangle_H$$

$$= \langle J(x), J(y) \rangle_{H^*}$$

$$= J^*(J(y))\,(\underbrace{J(x)}_{= \ell}) = (J^* \circ J)(y)[\ell]$$

$\Rightarrow \quad I = \underbrace{J^*(J)}_{\text{surjektiv}} \quad \Rightarrow I$ surjektiv

$\Rightarrow$ H reflexiv.

Bem. 6.6.

$I: X \longrightarrow X^{**}$ (vollständig) ist "Vervollständigung", d. h.

$X \hookrightarrow \overline{I(X)}^{X^{**}}$

linear, isometrisch

Satz 6.7

(⇒ l^∞ nicht reflexiv)

$\boxed{Ü}$ i) Falls X reflexiv $\Rightarrow$ X^* reflexiv.

ii) X^* reflexiv, X vollständig $\Rightarrow$ X reflexiv.

Beweis (ii):

Angenommen X nicht reflexiv.

$$I(X) \subsetneq X^{**} \qquad \text{abgeschlossener UR}$$

$$\Uparrow$$

X vollständig

damit $\exists\, x_0^{**} \in X^{**}$ mit

$$\operatorname{dist}(x_0^{**}, I(X)) > 0$$

Satz 5.8 $\Rightarrow$ $\exists\, \ell^{***} \in (X^{**})^*$ mit $\qquad (X^*)^{**}$

$$\ell^{***}(x_0^{**}) = 1$$

$$\ell^{***}\big|_{I(X)}(\ ) = 0 \qquad (*)$$

Da (X^*) reflexiv ist $\exists\, \ell^* \in X^*$ mit

$$\ell^{***}(x^{**}) = x^{**}(\ell^*) \qquad \forall x^{**} \in X^{**}$$

$x \in X$: $\quad \ell^*(x) = \underbrace{(Ix)}_{X^{**}}(\ell^*) = \underbrace{\ell^{***}}_{X^{***}}\underbrace{(Ix)}_{X^{**}} \overset{(*)}{=} 0 \qquad \forall x \in X!$

$$0 = \|\ell^*\|_{X^*} = \|\ell^{***}\|_{X^{***}} \Rightarrow \ell^{***} = 0 \in X^{***} \quad ↯ \quad \ell^{***}(x_0^{**}) = 1.$$

Satz 6.8:

Sei X reflexiv, $Y \subseteq X$ abgeschlossener linearer UR.

Dann ist Y reflexiv.

Bew: $\xi: X^* \longrightarrow Y^*$ Einschränkungsoperator,

$$\xi(x^*)(y) := x^*(y) \quad \forall y \in Y.$$

$$\eta: \cancel{Y}^{**} \longrightarrow \cancel{X}^{**}$$

$$\eta(y^{**})(\ell) := y^{**}(\xi(\ell)) \qquad \forall \ell \in X^*.$$

$$\|\eta\|_{L(Y^{**},X^{**})} \le 1, \qquad \|\xi\|_{L(X^*,Y^*)} \le 1$$

kanonische Einbettung/Isometrien $I: X \to X^{**}$, $I^Y: Y \to Y^{**}$.

surjektiv.

Beh.: $\forall y^{**} \in Y^{**}$: $\underbrace{I^{-1}(\eta(\cancel{Y}y^{**}))}_{=: x} \in Y.$

Falls nicht:

$\exists\ \ell$ mit $\ell(x) \neq 0$ $\ell|_Y = 0$

abgeschlossen!

$\Rightarrow \quad \xi(\ell) = 0$

$$\Rightarrow \quad \underset{\underset{0}{\|}}{y^{**}}(\xi(\ell)) = \eta(y^{**})(\ell) \overset{\text{Def. } x}{=} (Ix)(\ell) \overset{\text{Def. } I}{=} \ell(x)$$

$\Rightarrow \quad \ell(x) = 0 \quad \lightning \quad \ell(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ Beh. stimmt //

Sei nun $y^{**} \in Y^{**}$. Setze $y := I^{-1}(\eta(y^{**})) \in Y$

Sei $f \in Y^*$ fortgesetzt auf $\ell \in X^*$ (Hahn-Banach)

$\Rightarrow \xi(\ell) = f.$

$$\underline{y^{**}(f)} = y^{**}(\xi(\ell)) = \eta(y^{**})(\ell) \overset{\text{def. } y}{=} (Iy)(\ell) = \ell(y) = \underline{f(y)} = I^Y(y)(f)$$

$\Rightarrow I^Y$ surjektiv. $\square$

6.2. Separabilität

Erinnerung: (M,d) separabel $\Leftrightarrow$ $\exists\, D \subseteq M$ abzählbar + dicht.

$L^p(\mathbb{R})$ separabel, $L^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel

Satz 6.9

$(X, \|\cdot\|_X)$ $\mathbb{R}$-VR, NVR.

i) X^* separabel $\Rightarrow$ X separabel

ii) X separabel + reflexiv $\Rightarrow$ X^* separabel

$\boxed{\text{Ü}}$

Bew (i)

Sei $(\ell_k)_{k=1}^\infty \subseteq X^*$ dicht.

$(x_k)_{k=1}^\infty \in X$ mit $\|x_k\|_X = 1$ & $\ell_k(x_k) \geq \|\ell_k\|_{X^*} - \frac{1}{k}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$X \supseteq Y := \overline{\operatorname{span}\{x_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}}^X$ $\leftarrow$ separabel.

Zeige also $Y = X$.

Falls nicht: da Y abgeschlossen $\exists\, x_0 \in X \setminus Y$, ~~mit~~ $\operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$.

$\Rightarrow \exists\, \ell \in X^*$ mit $\ell|_Y = 0$, $\ell(x_0) \neq 0$.

$\exists$ TF. $\quad l_{n_i} \longrightarrow l \quad$ in X^* (da $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht)

$$\|l\|_{X^*} = \lim_{i\to\infty} \|l_{n_i}\|_{X^*} \leq \limsup_{i\to\infty}\left(|l_{n_i}(x_{n_i})| + \underbrace{\frac{1}{n_i}}_{\to 0}\right)$$

$$\leq \limsup_{i\to\infty} |l_{n_i}(\underbrace{x_{n_i}}_{\in Y})|.$$

$$|l_{n_i}(x_{n_i})| = |l_{n_i}(x_{n_i}) - \overbrace{l(x_{n_i})}^{=0}|$$

$$\leq \|l_{n_i} - l\|_{X^*} \underbrace{\|x_{n_i}\|}_{=1} \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad \|l\|_{X^*} = 0 \quad \lightning \quad l(x_0) \neq 0.$$

$\square$