6.3 Schwach *- Konvergenz / Kompaktheit

$(X, \|\cdot\|)$ NVR, X^* Dualraum, X^{**} Bidualraum

Def. 6.10:

$(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ konvergiert schwach* gegen $l \in X^*$, $l_n \xrightarrow{w^*} l$,

!

falls

$$l_n(x) \longrightarrow l(x) \quad \forall x \in X.$$

Auf X^* drei Konvergenzbegriffe

i) Starke / Norm - Konvergenz

$$\|l_n - l\|_{X^*} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ii) Schwache Konvergenz

$$\forall z \in X^{**}: \quad z(l_n) \xrightarrow{n\to\infty} z(l)$$

iii) $\forall x \in X$: $\quad l_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} l(x)$

schwach* - Konvergenz.

[da kanonische Einbettung $I: X \to X^{**}$

iii) $\Leftrightarrow$ $(Ix)(l_n) \longrightarrow (Ix)(l) \quad \forall x \in X$

$\Leftarrow$ ~~Falls~~ I.A. $\quad$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

[Falls X reflexiv:

ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (schwach*-Konvergenz $\Leftrightarrow$ schwache Konvergenz)]

schwach*

Satz 6.11 (Banach-Alaoglu) ["PRÄKOMPAKTHEIT VON Beschränkten Mengen"]

X separabel, $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ beschränkt, d.h.

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\ell_k\|_{X^*} < \infty$$

Dann $\exists\ \ell \in X^*$ ~~mit~~ und Teilfolge $k_i \to \infty$

und schwach*-Konvergenz: $\ell_{k_i} \xrightarrow{w^*} \ell$ in X^*

Beweis: Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dicht in X.

$\forall j$: $\left(\ell_k(x_j)\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge k_i (abhängig von j)

$$\ell_{k_i}(x_j) \longrightarrow a_j$$

j-Diagonalfolge $\rightsquigarrow$ $\exists$ TF k_i s.d.

$$\ell_{k_i}(x_j) \xrightarrow{k\to\infty} a_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

Setze

$$\ell(x_j) := \lim_{i\to\infty} \ell_{k_i}(x_i) = a_j.$$

ℓ kann linear fortgesetzt werden auf $Y := \operatorname{span}\{x_j,\ j\in\mathbb{N}\}$

da ℓ_k's linear sind.

$$|\ell(x)| = \lim_{i\to\infty} |\ell_{k_i}(x)| \le \limsup_{k\to\infty} \|\ell_k\|_{X^*} \|x\|_X$$

$$\le \|x\| \underbrace{\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\ell_k\|_{X^*}}_{<\infty \text{ nach Vor.}}$$

$\forall x \in Y$

$\Rightarrow$ ℓ ist stetig fortsetzbar auf ganz X^*.

<u>Beh:</u> $\ell_{k_i} \xrightarrow{w^*} \ell$.

Sei $x \in X \Rightarrow \exists\ y_j \in (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{j\to\infty} y_j$.

dichte TM

$$|\ell_{k_i}(x) - \ell(x)| \le |\ell_{k_i}(y_j - x)| + |\ell(x-y_j)| + |\ell_{k_i}(y_j) - \ell(y_j)|$$

$$\le 2 \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\ell_k\|_{X^*} \|x-y_j\|_X + |\ell_{k_i}(y_j) - \ell(y_j)|$$

k_i TF.
$y_j \in \{x_i,\ i\in\mathbb{N}\}$

$$\limsup_{k_i\to\infty} |\ell_{k_i}(x) - \ell(x)| \le 2 \sup_k \|\ell_k\|_{X^*} \|x-y_j\| + 0$$

für $j\to\infty \Rightarrow |\ell_{k_i}(x) - \ell(x)| \to 0.$ $\square$

~~Idee: $X^{**} = X$~~

Satz 6.12 (Eberlein – Smulyan)

Sei X reflexiv, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ beschränkt

$\Rightarrow \exists$ TF $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $x \in X$ mit

$$x_{k_i} \longrightarrow x \quad \text{schwach in } X$$

[„Bolzano – Weierstraß schwach"]

Idee $X^{**} = (X^*)^*$ + Satz 6.11:

Beweis:

$$Y := \overline{\operatorname{span}\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\}}^X \quad \leftarrow \text{separabel! reflexiv } (\in \text{S. 6.8})$$

$\overset{\text{S. 6.9. ii)}}{\Rightarrow} Y^*$ separabel

Sei $I: Y \longrightarrow Y^{**}$ die kanonische Einbettung.

$\underset{\text{Banach-Alaoglu S. 6.11}}{\Rightarrow} (Ix_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (Y^*)^*$ schwach *-kompakt, d.h.

$$\exists \text{ TF } (x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}, \quad x \in X \qquad \left[\begin{array}{l} \exists x^{**} \in Y^{**} \\ Ix = x^{**} \end{array}\right]$$

$$\forall \ell \in Y^* \quad (Ix_{k_i})(\ell) \xrightarrow{i\to\infty} (Ix)(\ell)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell(x_{k_i}) \xrightarrow{i\to\infty} \ell(x).$$

z.z. dies gilt auch $\forall \ell \in \underline{X^*}$

Sei $\ell \in X^*$

$\Rightarrow \ell|_Y \in Y^*$

$\Rightarrow \ell(x_{n_i}) = \ell|_Y(x_{n_i}) \longrightarrow \ell|_Y(x) = \ell(x)$

$\Rightarrow \quad x_{n_i} \longrightarrow x$ schwach in X. $\square$

<u>Satz 8.13</u> (Approximationsthm)

X reflexiv, $C \subseteq X$ nichtleer, konvex, abgeschlossen. $x_0 \in X \setminus C$.

Dann $\exists$ $c_0 \in C$ mit

$$\|x_0 - c_0\|_X = \operatorname{dist}(x_0, C) = \inf_{c \in C} \|x_0 - c\|.$$

<u>Bew:</u> ~~Siehe unten~~ Folgt aus Variationsprinzip:

Satz 6.14 (Variationsprinzip)

$(X, \|\cdot\|_X)$ NVR, $M \subseteq X$ Teilmenge, $M \neq \emptyset$

$F: M \longrightarrow \mathbb{R}$.

[Ziel: Finde Minimizer]

Falls
- X reflexiv
- F koerziv, d.h.

$$F(x) \longrightarrow \infty \quad \text{falls } \|x\|_X \to \infty \quad \text{für } x \in M$$

["kein Min bei ∞"]

- F schwach Folgen-unterhalb-stetig

$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \qquad \forall\, \underset{\substack{\uparrow \\ M}}{x_n} \xrightarrow{w} \underset{\substack{\uparrow \\ M}}{x} \quad \text{schwach in } X$$

- M schwach folgen-abgeschlossen, d.h.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ M}}{x_n} \xrightarrow{w} x \in X \implies x \in M.$$

Dann $\exists\, x_0 \in M$ mit

$$F(x_0) = \inf_{x \in M} F(x)$$

Bew $\boxed{\text{Ü}}$

Bew von Satz 6.13

- $F(x) := \|x_0 - x\|$ für $x \in M := G$.

- F koerziv:

$\Rightarrow$ $F(x) \geq \|x\| - \|x_0\| \longrightarrow \infty$ für $\|x\| \to \infty$

- F schwach Folgen-uhs:

mit Satz 5.13:

$\liminf_{k \to \infty} \|x_0 - x_k\| \geq \|x_0 - x\|$ falls $x_k \xrightarrow{w} x$ schwach.

- (schwach Folgen abgeschlossen

Satz 5.14 ($\Leftarrow$ Konvex + abgeschlossen).

$\square$

Anwendung: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes, offenes Gebiet.

Sei $f \in L^2(\Omega)$.

Dann <u>existiert</u> Lösung u zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

"Beweis":

Sei $E(u) := \int_\Omega (-\Delta u - f)\, u \overset{\text{P.I.}}{=} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u.$

Finde Minimum...

Raum: $C^2(\Omega)$ mit NORM

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2} \quad \leftarrow \text{Prähilbert-Raum-Norm.}$$

$(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ ist nicht vollständig.

$$\Rightarrow \quad \overline{C^1(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}} \quad \leftarrow \text{Abschluss bzgl. } \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}\text{-Norm}$$

$$\overline{C^1(\bar{\Omega})} = H_0^1(\Omega) \qquad \text{Sobolev-Raum.}$$

$\hookrightarrow$ Hilbert-Raum $\rightsquigarrow$ reflexiv.

- Es gilt

(Poincaré-Ungleichung)

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \sim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (*)$$

$\Rightarrow$

$$E(u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |f|\,|u| \quad \text{Hölder}$$

$$\overset{(*)}{\geq} C \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{\text{Young}}{\geq} C \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \int \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\overset{\forall \varepsilon > 0 \text{ Young}}{\geq} C \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{C_2}{\varepsilon} \int_\Omega |f|^2 - \varepsilon \int \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$= \underbrace{(C-\varepsilon)}_{\overset{V}{0}} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{C_2}{\varepsilon} \int_\Omega |f|^2$$

falls ε klein genug gewählt.

$$\Rightarrow \quad E(u) \geq \tilde{C} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \tilde{\tilde{C}} \int_\Omega |f|^2$$

$\Rightarrow$ <u>E ist koerziv.</u>

$u_k \xrightarrow{w} u$ schwach in $H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_k|^2$ ($\Leftarrow$ Norm ist schwach uhs!)

$u \mapsto \int f u$ ist stetig. Funktional in $(H_0^1(\Omega))^*$

$\Uparrow$

$\left[\int f u \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right.$

$\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

$\Rightarrow E(u_k) = \int |\nabla u_k|^2 - \int f u_k$

$\Rightarrow \liminf E(u_k) \geq E(u)$ Falls $u_k \xrightarrow{w} u$.

$\Rightarrow$ E ist schwach uhs.

$\Rightarrow$ $\exists$ Minimizer $E(u) \leq E(v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Variationsprinzip

$$E(u+t\varphi) \geq E(u) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{E(u+t\varphi)-E(u)}{t} \geq 0$$

$$\Big\downarrow \; t \downarrow 0$$

$$\pm \int A\nabla u \, \nabla\varphi - u f \qquad //$$