7. Spektraltheorie:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\rightsquigarrow$ Eigenwerte: $\lambda \in \mathbb{C}$, Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

Wir wissen: • Eigenwerte /-Vektoren "definieren uns A"

$\rightsquigarrow$ Jordan-NORMALFORM

• $\bar{A}^T = A \Rightarrow$ nur <u>reelle Eigenwerte</u>

↳ EV bilden Basis von $\mathbb{C}^n$.

Wie findet man Eigenwerte?

$$\exists v \neq 0: \; Av = \lambda v \iff \exists v \neq 0: (A - \lambda I)v = 0$$

$$\iff \operatorname{Kern}(A - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Problem in ∞-dim. Falls A nur dicht definiert.

$$\iff (A - \lambda I) \text{ nicht invertierbar}$$

$$\iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

det in ∞-dimensi VR nicht sinnvoll!

Charakteristisches Poly von $\lambda \longmapsto \det(A - \lambda I)$

Nullstellen sind EW.

Wir betrachten

$$A \in L(\mathbb{H})$$

Komplexwertiger HR

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

<u>Def. 7.1:</u>

- Resolventenmenge von A:

identität: $H \to H$

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \; ; \; A - \lambda I \text{ bijektiv}, \; (A - \lambda I)^{-1} \in L(H)\}$$

OPEN MAPPING THM!

- Spektrum von A:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A).$$

aufgeschlüsselt in

<u>Punktspektrum:</u> <u>(Eigenwerte)</u>

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)x = 0 \text{ für ein } x \in H, x \neq 0\}$$

[$A - \lambda I$ nicht injektiv]

<u>Eigenraum:</u> $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{x \in H : (A - \lambda I)x = 0\} \neq \{0\}.$

- Kontinuierliches Spektrum:

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A) : A - \lambda I \text{ injektiv mit } \operatorname{im}(A-\lambda I) \text{ dicht} \}$$

λ kein Eigenwert!

- Restspektrum

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus \{ \sigma_c(A) \cup \sigma_p(A) \}$$

Bsp: • $H = \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Es gilt $A - \lambda I$ injektiv $\iff$ $A - \lambda I$ surjektiv

$\iff (A - \lambda I)^{-1} \; \exists \; \mathbb{C}^{n\times n}$

"stetig" Matrix!

$\Rightarrow \quad \sigma(A) = \sigma_p(A)$ "Spektrum von A sind EW"

- λ EW $\iff \det(A - \lambda I) = 0$

$\Rightarrow \exists$ maximal n EW,

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq \mathbb{C}$, $k \leq n$.

- $\Rightarrow \rho(A) \neq \emptyset \qquad \rho(A)$ dicht in $\mathbb{C}$.

Ziel: "Alle Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ sind kompakte Operatoren"

Satz 7.2

Sei H HR und $A: H \to H$ linear, stetig + Kompakt,

dann:

- $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \{\lambda_k \in \mathbb{C} : \lambda_k \neq 0,\ \lambda_k$ Eigenwert zu A, d.h. $\exists x \in H\setminus\{0\}: Ax = \lambda_k x\}$

  abzählbar viele!

- Ist $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ EV von A so gilt
  $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \dim\{x \in H : \cancel{Ax = \lambda x}\ (A-\lambda I)x = 0\} < \infty$.

- Falls unendlich viele EW existieren
  $\Rightarrow$ Häufungspunkt in 0.

Satz 7.3 ($\bar{A}^T = A \rightsquigarrow$ selbstadjungierte Op.)

H HR, ~~A: H→H li~~ $A: H \to H$ linear, stetig + kompakt

und A ~~selbst~~ selbstadjungiert $A^* = A$, dann

- $\sigma(A)$ wie in Satz 7.2:
  $\sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \{$ Eigenwerte, die sich in 0 häufen $\}$

- $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (Eigenwerte sind reell)

- Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind <u>orthogonal</u>:
  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2 \in H \setminus \{0\}$ s.d.
  $$A v_1 = \lambda_1 v_1 \quad , \quad A v_2 = \lambda_2 v_2$$
  Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad (\Leftrightarrow v_1 \perp v_2)$.

- $\exists$ Orthonormalsystem $\{x_n \in H, n \in \mathbb{N}\}$ von Eigenvektoren,
  so dass $$A x = \sum \underbrace{\lambda_n}_{\text{Eigenwert von } x_n} \langle x, x_n \rangle x_n \quad \forall x \in H$$

- Falls $\lambda = 0$ kein EW $\Rightarrow$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Basis
  ($\Rightarrow$ H separabel)

7 Selbstadjungiertheit / Duale Operatoren

H $\mathbb{C}$-HR, d.h. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda} \langle x, y\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

Def. 7.4. (Dualer Operator)

Betrachte die (sesquilinear)-Form für $A \in L(H)$

$$\underset{H\times H}{(x,y)} \longmapsto \langle Ax, y\rangle_H \in \mathbb{C}$$

Als Abbildung $x \longmapsto \langle Ax, y\rangle$ (Festes y)

↗ stetig, linear $\Rightarrow$ Riesz Darstellungssatz

$$\exists!\ \underset{\substack{\| \\ z_y}}{z} \in H \text{ mit } \langle Ax, y\rangle_H = \langle x, z_y\rangle.$$

Nenne $A^* y := z_y$.

A^* ist linear + stetig $\quad \|A^*\|_{L(H)} = \|A\|_{L(H)}$

↑ adjungierte
duale Operator zu A

$$\boxed{\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle}$$

Bsp: 7.5

$$A \in \overset{H}{\mathbb{C}^{n\times n}}$$

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{Ax}^T y = \bar{x}^T \bar{A}^T y = \langle x, (\bar{A}^T y)\rangle$$

$$A^* = \bar{A}^T$$

$\Leftrightarrow$

$$A \in \overset{H}{\mathbb{R}^{n\times n}}$$

$$A^* = A^T$$

Def. 7.6 (Hermitisch / Symmetrisch)
$\qquad\qquad\;\;\mathbb{C}\qquad\qquad\quad\mathbb{R}$

$A \in L(H)$. Falls $A^* = A$: A selbstadjungiert.

Satz 7.7 $A \in L(H)$ selbstadjungiert

- $$\|A\|_H = \sup_{\|x\|_H \le 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

Bew

Sei $\quad \gamma := \sup\limits_{\substack{x \in H \\ \|x\| \le 1}} |\langle Ax, x\rangle|.$

Klar: $\quad \gamma \overset{C.S.}{\le} \|A\|.$

Andersrum: $\quad \forall y, z \in H:$

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ay, z\rangle) = \langle A(y+z), y+z\rangle - \langle A(y-z), y-z\rangle :$$

$$\| $$

$$\cancel{\langle Ay, y\rangle} + \langle Az, y\rangle + \cancel{\langle Az, z\rangle} + \langle Ay, z\rangle$$

$$-\cancel{\langle Ay, y\rangle} - \cancel{\langle Az, z\rangle} + \langle Az, y\rangle + \langle Ay, z\rangle$$

$$= 2\langle Az, y\rangle + 2\langle Ay, z\rangle$$

$$\overset{A=A^*}{=} 2\langle z, Ay\rangle + 2\langle Ay, z\rangle$$

$$\overset{\langle,\rangle}{=} 2\overline{\langle Ay, z\rangle} + 2\langle Ay, z\rangle = 4\,\mathrm{Re}(\langle Ay, z\rangle) \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad 4\,\mathrm{Re}(\langle Ay, z\rangle) \le \cancel{\|A(y+z} \; \gamma\left(\|y+z\|^2 + \|y-z\|^2\right)$$

$$\overset{\text{Parallelogramm}}{=} \gamma\left(2\|y\|^2 + 2\|z\|^2\right)$$

~~$\Rightarrow \langle Ay, Ay \rangle$~~

Dies für $y := \|Au\|_H\, u$, $z := Au$ für ein $\|u\|_H = 1$

$$4 \operatorname{Re} \underset{\substack{\| \\ \langle \|Au\|_H Au, Au \rangle \in \mathbb{R}}}{\langle \|Au\|_H Au, Au \rangle} \leq 2\gamma \left(\|Au\|_H^2 + \|Au\|_H^2 \right)$$

$$4 \quad \|Au\|_H^3 \leq 2\gamma \quad 2\|Au\|_H^2 \qquad \forall \|u\| = 1$$

$$\Rightarrow \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|_H \leq \gamma = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|$$

$$\|A\|_{L(H)} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|$$

$\square$

Satz 7.8

$\langle Ax + Bx, y\rangle$ $\quad -10$

$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, (A+B)^* y\rangle$

~~$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, A^* y + B^* y\rangle$~~

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$\langle \lambda A x, y\rangle = \langle x, (\lambda A)^* y\rangle$

$\lambda \langle Ax, y\rangle = \lambda \langle x, A^* y\rangle$

$= \langle x, \bar{\lambda} A^* y\rangle.$

(ii) $(AB)^* = B^* A^*$

(iii) $A^{**} = A$ $\qquad \boxed{\ddot{U}}$

(iv) $\|A^*\|_{L(H)} = \|A\|_{L(H)}$

(v) $\|AA^*\| = \|A^* A\| = \|A\|^2$

(vi) Falls $A^{-1} \in L(H) \Rightarrow (A^*)^{-1} \in L(H)$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

$\langle AA^{-1} x, y\rangle = \langle x, y\rangle \Rightarrow A^*(A^{-1})^* = Id$

$\langle x, A^*(A^{-1})^* y\rangle$

ge. $\langle A^{-1} A x, y\rangle \rightsquigarrow (A^{-1})^* A^* = Id$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ ✓

$\mathrm{Im}\,A = \cancel{\ldots}\ \{y \in H : y = Ax \text{ für ein } x \in H\}$

(vii)

$$\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^*)$$

$A^{**} = A$

$$\mathrm{Im}(A^*)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A)$$

$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in H : Ax = 0\}.$

$\boxed{\text{ÜA27}}$ $\Rightarrow$

$$H = \overline{\mathrm{Im}(A)} \oplus \mathrm{Ker}\,A^*$$

$$= \overline{\mathrm{Im}(A^*)} \oplus \mathrm{Ker}\,A$$

Ker A ist immer Abgeschlossen!
Falls A stetig!

<u>Bew:</u> (vii) • Falls $x \in \mathrm{Ker}(A)$

$$\Rightarrow \langle Ax, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H$$

$$\Rightarrow \langle x, A^*y\rangle = 0 \quad \forall y \in H$$

$$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}(A^*)^{\perp}$$

Recall: $U^{\perp} = \{x \in H : \langle x, u\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$

• Falls $x \in \mathrm{Im}(A^*)^{\perp}$

$$\Rightarrow \forall y \in H: \quad \langle x, A^*y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle Ax, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H$$

$$\langle Ax, Ax\rangle = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\,A.$$

in ÜA27 gezeigt
$\forall$ abgeschlossenen URn U gilt:

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

$$\overline{\mathrm{Im}A} \oplus \overline{\mathrm{Im}A}^{\perp} = (\mathrm{Im}A)^{\perp}$$

7.2 Kompakte Operatoren:

Def: 7.9 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NVR

$T: X \to Y$ heißt kompakt

Falls beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen abgebildet werden, d.h.

$\forall \ (x_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ mit $\sup_i \|x_i\|_X < \infty$ gilt

$(Tx_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq Y$ besitzt eine Teilfolge mit Cauchy-Eigenschaft

$K(X, Y)$ ist Menge linearer, kompakter Abb. $X \to Y$.

Satz 7.80

(i) Jeder lineare, kompakte Operator ist stetig $\boxed{\ddot{U}}$

(ii) schwach konvergente Folgen $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq X \Rightarrow (Tx_i)$ Cauchy.
T kompakt $\nearrow$ $\boxed{\ddot{U}}$

(iii) Sei $\dim X < \infty$ oder $\dim Y < \infty$

dann ist $T \in L(X,Y) \Leftrightarrow T \in K(X,Y)$.

(iv) X, Y, Z NVR

$A \in L(X,Y)$, $B \in K(Y,Z)$ $\Rightarrow$ $B \circ A$ kompakt

$B \in L(X,Y)$, $A \in K(Y,Z)$ $\quad$ $A \circ B$ kompakt

(v) $\cancel{A}$ kompakt $\Rightarrow$ $\cancel{A}^*$ kompakt (ohne Beweis).

7.3 FREDHOLM-ALTERNATIVE:

Lemma 7.11

H HR, $A \in K(H)$ (kompakter, linearer Operator).

Dann $\exists\, C > 0$ so dass

$$\|z\|_H \leq C \; \|(A-I)z\|_H \qquad \forall z \in \operatorname{Ker}(A-I)^\perp$$

("gut" $(A-I$ ist injektiv!) auf $\operatorname{Ker}(A-I)^\perp$)

Beweis: Angenommen Beh. ist falsch.

Dann $\exists\, z_k \in H$ mit $z_k \in \operatorname{Ker}(A-I)^\perp$

$$\|z_k\|_H > k \; \|(A-I)z_k\|_H \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > k \; \left\|(A-I)\frac{z_k}{\|z_k\|}\right\|_H \qquad (*)$$

$\rightsquigarrow$ OE $\|z_k\|_H = 1$.

$\overset{A \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ TF. $A z_{k_i} \longrightarrow y$ $(**)$ OE $k_i = k$

$$\underset{\in \operatorname{Ker}(A-I)^\perp}{z_k} = \underbrace{A z_k}_{\downarrow (**)\; y} - \underbrace{(A-I) z_k}_{\downarrow (*)\; 0}$$

$\overset{\operatorname{Ker}(A-I)^\perp}{\Longrightarrow}$ $z_k \to y \in \operatorname{Ker}(A-I)^\perp$.

& $\|y\| = 1$

da $\|z_k\|_H = 1 \;\forall k$

$$(A-I)y \underset{\substack{\uparrow \\ z_k \to y}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{(A-I)z_k}_{\overset{\text{da } (*)}{=} 0}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad y \in \operatorname{Ker}(A-I) \cap \operatorname{Ker}(A-I)^{\perp} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \quad \lightning \quad \|y\| = 1. \qquad \Box$$

Satz 7.12 (FREDHOLM-ALTERNATIVE)

H HR, $A \in K(H)$. Es gilt:

(i) $\dim \operatorname{Ker}(A-I) < \infty$

(ii) $\operatorname{Im}(A-I) = \overline{\operatorname{Im}(A-I)}$ ($\operatorname{Im}(A-I)$ ist abgeschlossen!)

(iii) $\operatorname{Im}(A-I) = \operatorname{Ker}(A^*-I)^{\perp}$ $\Rightarrow$ $H = \operatorname{Im}(A-I) \oplus \operatorname{Ker}(A^*-I)$

Kein Abschluss nötig!

(iv) $\operatorname{Im}(A-I) = H \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A-I) = \{0\}$

surjektivität injektivität

(v) $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = \dim \operatorname{Ker}(A^*-I)$

Beweis S. 7.12:

(i) Angenommen nicht

$\Rightarrow \exists \ (x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq H$ linear unabhängige Vektoren in $\mathrm{Ker}(A-I)$.

Gram-Schmidt-Verfahren

$\Rightarrow \quad (e_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Ker}(A-I)$. orthogonalsystem

$\downarrow$

paarweise orthogonal.

$\|e_k\|_H = 1.$

$$(A-I)e_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Ae_k = e_k$$

$$\Rightarrow \quad \|Ae_k - Ae_i\|_H^2 = \|e_k - e_i\|_H^2 \underset{e_k \perp e_i}{=} \|e_k\|^2 + \|e_i\|^2 = 2 \quad \text{Falls } k \neq i$$

$\Rightarrow \quad \nexists$ konvergente TF von $(Ae_i)_i \subset H$ $\lightning$ A kompakt

$\sup\limits_i \|e_i\| < \infty$

$\|e_i\| = 1$

(ii)

$(y_n) \subseteq \operatorname{Im}(A-I)$, $y_n \longrightarrow y$ in H

z. z. $y \in \operatorname{Im}(A-I)$.

Sei $x_n \in X$ mit $(A-I)x_n = y_n$.

Splitte $H = \operatorname{Ker}(A-I) \oplus \operatorname{Ker}(A-I)^{\perp}$ (vgl. Ü A27)

abgeschlossen U-Raum !

$$x_n = \underset{\operatorname{Ker}(A-I)}{\underset{\in}{u_n}} + \underset{\operatorname{Ker}(A-I)^{\perp}}{\underset{\in}{v_n}}$$

$$y_n = (A-I)x_n = (A-I)v_n$$

Lemma 7.11 $\Rightarrow$ Für eine $C > 0$ fest:

$$\|v_n\|_H \leq C \|(A-I)v_n\|_H = C\|y_n\|$$

$$\|v_n - v_i\|_H \leq C \|(A-I)(v_n - v_i)\|_H = C \|y_n - y_i\|_H \to 0$$

$\Rightarrow$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. $\overset{H \text{ Hilbertraum}}{\Rightarrow}$

$$v_n \longrightarrow v \text{ in } H.$$

$\operatorname{Ker}(A-I)^{\perp}$ abgeschlossen $\Rightarrow v \in \operatorname{Ker}(A-I)^{\perp}$

$$(A-I)v = \lim_{k\to\infty} (A-I)v_k = \lim_{k\to\infty} y_k = y$$

$$\Rightarrow y \in \operatorname{Im}(A-I).$$

// (ii)

(iii) $\Leftarrow$ (ii) ~~da~~ $\cancel{H = \overline{\operatorname{Im}(A-I)} \oplus \operatorname{Im}(A-I)}$

da laut Satz 7.8 (vii)

$\cancel{H = \overline{\operatorname{Im}(A)} \oplus N}$

$$\operatorname{Im}(A-I)^\perp = \operatorname{Ker}(A^*-I)$$

beide Abgeschlossen

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(A-I) = \operatorname{Ker}(A^*-I)^\perp$$

[U abgeschlossen $\overset{UR}{\Rightarrow}$ $U^{\perp\perp} = U$:

$\underline{u \in U^{\perp\perp}}$ $\Rightarrow$ $u = u_1 \oplus u_2$
$u \in (U^\perp)^\perp$ $\quad u_1 \in U^\perp$, $u_2 \in U$

$\Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \underline{u \in U.}$

$u \in U^{\perp\perp} \Rightarrow$ $u = u_1 \oplus u_2$
$\quad u_1 \in U^\perp$, $u_2 \in U^{\perp\perp}$

Ang. $u_1 \neq 0 \Rightarrow u - u_1 \in U^{\perp\perp}$ ...

$\Rightarrow u_1 \in U$ ↯

(iv) "$\Leftarrow$" Sei $\operatorname{Ker}(A-I)=\{0\}$

Angenommen $\operatorname{Im}(A-I) \subsetneq H$.

Es gilt: $\operatorname{Ker}(A-I) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A^*-I)} = H$

$\operatorname{Ker}(A^*-I) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A-I)} = H$ (ii)

Da A (und A^*) - Kompakt ~~...~~.

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(A^*-I) \neq \{0\}$ & $\operatorname{Im}(A^*-I) = H$.

$y_1 \in \operatorname{Ker}(A^*-I) \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow \exists\, y_2 \neq 0 : (A^*-I)\, y_2 = y_1 \neq 0$

$(A^*-I)^2 y_2 = 0$.

$\Rightarrow \exists$ ~~...~~ $\forall n \in \mathbb{N} : \exists\, y \neq 0$ s.d.

$y \neq 0, \ (A^*-I)^1 y \neq 0, \ \dots, \ (A^*-I)^{n} y \neq 0 \quad (A^*-I)^{n+1} y = 0$

$y = x \oplus u$ $\to \operatorname{Ker}(A^*-I)^n$

$\to \operatorname{Ker}((A^*-I)^n)^{\perp}$

Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq H$ s.d. $x_{k+1} \in \operatorname{Ker}((A^*-I)^k)^{\perp} \cap \operatorname{Ker}((A^*-I)^{k+1})$

$\|x_{k+1}\|_H = 1$

Es gilt:

$n > m$

$\cancel{A^* y_n \quad A^* y_m}$

$$\|A^* x_n - A^* x_m\|_H^2$$

$$= \|y_n + \underbrace{\underbrace{(A^*-I)x_n}_{\in Ker((A^*-I)^{n-1})} - \underbrace{x_m}_{\in Ker(A^*-I)^m} - \underbrace{(A^*-I)x_m}_{\in Ker(A^*-I)^{m-1}}}_{\in Ker((A^*-I)^{n-1}),\ =: v}\|_H^2$$

$y_n \in Ker((A^*-I)^{n-1})^\perp$

$$= \|x_n\|^2 + \|v\|^2 \geq \|x_n\|^2 = 1$$

$\Rightarrow \|A^* x_n - A^* x_m\|_H \geq 1 \quad \forall \ m < n.$

$\Rightarrow \nexists$ konvergente TF von $(A^* x_n)$ $\lightning$ A^* kompakt nach S. 7.10 (v) //

$\cancel{\|A\|}$ $\Rightarrow \operatorname{Im}(A - I) = H.$

(iv) "$\Rightarrow$" Sei $\operatorname{Im}(A-I) = H$.

$$\operatorname{Im}(A-I) = \operatorname{Ker}(A^*-I)^\perp = H$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker}(A^*-I) = \{0\}.$$

$$\overset{\text{"}\Leftarrow\text{"}}{\Rightarrow} \quad \operatorname{Im}(A^*-I) = H$$

$$\Rightarrow \quad \{0\} = \operatorname{Ker}(A^{**}-I) = \operatorname{Ker}(A-I).$$

(v) ohne Beweis.

Korollar 7.13 (FREDHOLM-ALTERNATIVE)

H HR, $A \in L(H)$ kompakt.

Entweder ist die inhomogene Gleichung $(\rightsquigarrow \mathrm{Im}(A-I) = H)$

FREDHOLM-ALT. Satz 7.12 (iv).

$$Au - u = v$$

eindeutig lösbar $\forall v \in H$

oder $Au - u = 0$ besitzt nichttriviale Lsg.

$\mathrm{Ker}\,(A-I) \neq \{0\}$

Recall:

Satz 7.2

H HR, $A \in L(H)$ kompakt

- $\sigma(A) = \{0\} \cup \{$ abzählbar viele $\lambda_k \underset{\neq 0}{\in} \mathbb{C}$, EW zu A, $\operatorname{Ker}(A-\lambda_k I) \neq \{0\}\}$

  $\hookrightarrow \mathbb{C} \setminus \varrho(A) \hookrightarrow \{\lambda \in \mathbb{C} : (A-\lambda I)^{-1} \in L(H)\}$

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ EW von A

  $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < \infty$

- Falls $|\sigma(A)| = \infty \Rightarrow$ alle Häufungspunkte in 0.

Bew: (i) $\lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist EW.

"$\Leftarrow$" klar.

"$\Rightarrow$" Falls λ kein EW

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$

$\underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{Ker}(\underbrace{\tfrac{1}{\lambda} A}_{\text{kompakt!}} - I) = \{0\}$.

$\hookrightarrow$ S. 7.12 (iv) $\quad \operatorname{Im}(\tfrac{1}{\lambda}A - I) = H$

$\Big\}$ $\tfrac{1}{\lambda}A - I$ ist bijektiv.

$\Downarrow$ OPEN MAPPING TH.

$\left(\tfrac{1}{\lambda}A - I\right)^{-1} \in L(H)$

$\underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} (A - \lambda I)^{-1} \in L(H)$

$\Rightarrow \lambda \in \varrho(A) \quad ↯ \quad \lambda \in \sigma(A)$.

Außerdem gilt $\dim \operatorname{Ker}(\tfrac{1}{\lambda}A - I) < \infty$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < \infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. // (i)

(ii) $\forall\, r>0 \,:\, \# \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda|>r,\ \lambda \text{ EW}\} < \infty$

endlich

$\Leftrightarrow$ nur abzählbar viele EW, HP nur in 0 $\}$.

Angenommen $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, λ_j paarweise disjunkt

$$|\lambda_j| > r > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$x_j \in H$, $\|x_j\|_H = 1$ Eigenvektoren zu λ_j, d.h.

$$A x_j = \lambda_j x_j.$$

$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ sind l.u. $(\boxed{\text{Ü}})$

$H_n := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{H_n \supsetneq H_{n-1}}$

Es gilt: "$H_n = H_{n-1} \oplus H_{n-1}^{\perp}$"

$\exists$ $y_n \in H_n$, $\|y_n\| = 1$

$y_n \in H_{n-1}^{\perp}$.

setzt "x_n"-Anteil auf 0

$m<n$

$$\|Ay_n - Ay_m\|_H^2 = \|\underbrace{(A-\lambda_n I)y_n}_{\in H_{n-1}} - \underbrace{(A-\lambda_m I)y_m}_{\in H_{m-1} \subset H_{n-1}} + \boxed{\lambda_n y_n} - \lambda_m y_m\|$$

$\lambda_n y_n \in H_{n-1}^{\perp}$, $\lambda_m y_m \in H_m \subseteq H_{n-1}$

$$= \|\dots\|_H^2 + \|\lambda_n y_n\|_H^2 \geq |\lambda_n|^2 > r > 0$$

$\Rightarrow$ $\cancel{Ay_n}$ ~~punktweise~~

Keine TF von $(Ay_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent $\lightning$ Akompakt $//_{(ii)}$

$\square$ S.7.1

Satz 7.3 (Recall)

(i) H HR, $A \in L(H)$ kompakt, $A^* = A$ (selbstadjungiert).

· $\sigma(A) = \{0\} \cup \{$ Abzählbar viele EW, HP nur in 0, dim Eigenraums $< \infty \}$

· $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ $\boxed{\text{Ü}}$ EW von selbstadjungierten Operatoren sind reell.

· verschiedene EV zu verschiedenen EW sind orthogonal $\boxed{\text{Ü}}$

(ii) $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$

Für ein abzählbares System von EV $\{x_1, \dots, x_\infty\}$ $x_i \perp x_j$ $i \neq j$, $\|x_i\| = 1$

$\downarrow$

EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Mehrfache Eigenwerte möglich!

(iii) Falls $\lambda = 0$ kein EW $\Rightarrow$ ON-Basis, d.h.

~~Abzählbar unendlich~~

$\forall x \in H$ gilt $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$.

Beweis: Sei $\lambda_n \in \mathbb{C}$ die EW $\neq 0$ geordnet nach Größe

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq \dots \quad > 0$$

$$x_1 \qquad x_2 \qquad \dots$$

$\exists$ Orthonormalsystem (unterschiedliche Eigenwerte $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ü}}$; gleiche Eigenwerte $\rightarrow$ Konstruktion Gram-Schmidt)

$$\left\| Ax - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k \right\|_H^2$$

$$\|$$

$$\Big\| A \underbrace{\Big(x - \sum_{k=1}^{N} \langle x, x_k \rangle x_k \Big)}_{\in H_N^\perp} \Big\|_H^2 \qquad H_N := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_N\}$$

$$\leq \|A\|^2_{L(H_N^\perp, H)} \; 2\|x\|_H^2$$

$\|$ $\quad$ $x \in H_N^\perp \Rightarrow \langle Ax, x_i \rangle \overset{A^*=A}{=} \langle x, Ax_i \rangle = \lambda_i \langle x, x_i \rangle = 0 \quad \forall i \leq N$

$$\|A\|_{L(H_N^\perp)} \Leftarrow A(H_N^\perp) \subset H_N^\perp$$

größte EW von A auf $H_N^\perp$

$$\| \qquad \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

$|\lambda_{N+1}|$ nach $\boxed{\text{Ü}}$

(iii) Sei $x \in H$

$$y := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x \rangle x_i$$

konvergent in H da C.F.

Beh. $y = x$!

Falls nicht:

$$A y = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x \rangle A x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x \rangle \lambda_i x_i$$

$$= A x$$

nach Beh. (ii)

$$\Rightarrow \quad A(y - x) = 0$$

Falls 0 kein EW $\Rightarrow$ $y = x$. □