Relle Analysis - Serie 7

A24: (i) $A \subset \Omega$ μ-messbar. <u>ZZ</u>: $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ μ-messbar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ <u>offen</u> teilmenge. Es gibt 4 Fälle:

- $1 \in U$ und $0 \in U$: $\chi_A^{-1}(U) = \{x \in \Omega : \chi_A(x) \in U \supset \{0;1\}\} = \Omega$ μ-messbar ist.
- $1 \in U$ und $0 \notin U$: $\chi_A^{-1}(U) = \{x \in \Omega : \chi_A(x) = 1\} = A$ "
- $1 \notin U$ und $0 \in U$: $\chi_A^{-1}(U) = \{x \in \Omega : \chi_A(x) = 0\} = \Omega \setminus A$ "
- $1 \notin U$ und $0 \notin U$: $\chi_A^{-1}(U) = \emptyset$ "

Also, für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}$, $\chi_A^{-1}(U)$ μ-messbar ist.

Da $\chi_A^{-1}(\pm\infty) = \emptyset$ ist auch messbar, schliessen wir, dass χ_A ist μ-messbar.

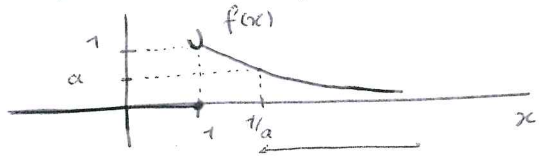
(ii) Von (i) es reicht aus, zu zeigen $A = \mathbb{Q}$ $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

Erinnere: $\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{q_k\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ein Borel Menge ist.

(iii) Die Vitali Menge V nicht $\mathcal{L}^1$-messbar ist. Also, χ_V auch nicht $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

Zum Beispiel: $\chi_V^{-1}(\{1\}) = V$ ist nicht $\mathcal{L}^1$-messbar. ($\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ aber $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ funktioniert auch)

(iv) Sei $f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$



Jede offen Teilmenge auf $\mathbb{R}$ kann mit Vereinigung von Intervalle $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, zu sein (Sehe 4.2). Also, es reicht aus, dass zu zeigen $f^{-1}(]-\infty, a])$ immer $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

Es gibt nur 4 Fälle: • <u>$a < 0$</u>: $f^{-1}(]-\infty, a]) = \emptyset$

- <u>$a = 0$</u>: $f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} =]-\infty, 1]$ weil $f^{-1}(\{0\}) =]-\infty, 1]$
- <u>$a \geq 1$</u>: $f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 1\}$ weil $f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- <u>$0 < a < 1$</u>: $f^{-1}(]-\infty, a]) = f^{-1}(]-\infty, 0] \cup]0, a]) = f^{-1}(]-\infty, 0]) \cup f^{-1}(]0, a])$
$=]-\infty, 1] \cup [\frac{1}{a}, +\infty[$

Intervalle oder Vereinigung von Interalle Borel Mengen sind, also, in Jedem Fall $f^{-1}(]-\infty, a])$, $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

A25:

(i) <u>δ_z ist ein Maß:</u> • $\delta_z(\emptyset) = 0$ weil $z \notin \emptyset$

- Wenn $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$: $\delta_z(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}}' \delta_z(A_k)$ (σ-subadditivität).

Es ist klar falls $z \notin A$ ($\delta_z(A) = 0 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}}' \underbrace{\delta_z(A_k)}_{\geq 0}$) und falls $z \in A$, dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $z \in A_{k_0}$, also $\delta_z(A) = 1 \leq \delta_z(A_{k_0}) + \sum_{k \neq k_0}' \delta_z(A_k)$.

•) δ_z lokal-endlich ist: (selbst immer endlich) $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt
$\delta_z(K) = 1$ oder $0 < \infty$.

•) δ_z Borel-regulär ist: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir wollen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ finden s.d.
$A \subseteq B$ und $\delta_z(A) = \delta_z(B)$.

Falls $z \in A$: $A \subseteq B := \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\delta_z(A) = \delta_z(\mathbb{R}^n)$ $(=1)$.

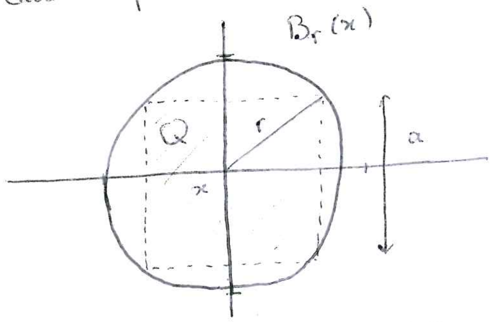
Falls $z \notin A$: $A \subseteq B := \mathbb{R}^n \setminus \{z\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\delta_z(A) = \delta_z(\mathbb{R}^n \setminus \{z\})$ $(=0)$
(Beachte dass $\mathbb{R}^n \setminus \{z\} =]-\infty, z[\cup]z, +\infty[$ ist offen)

(ii) (Jede Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist δ_z-messbar) $\Leftarrow$ (Jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist δ_z-messbar)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir zeigen $\delta_z(B) = \delta_z(B \cap A) + \delta_z(B \setminus A)$ immer gilt.

$z \in A$	$z \in B$	$\delta_z(B)$	$\delta_z(B \cap A) + \delta_z(B \setminus A)$
Yes	Yes	1	$1 + 0 = 1$
Ja	Nein	0	$0 + 0 = 0$
Nein	Ja	1	$0 + 1 = 1$
Nein	Nein	0	$0 + 0 = 0$

A26: (i) Wir sollten ein Quader dass passt ganz in B zu finden (weil wissen wir das Maß von ein Quader). In Dimension n, ~~durch~~ nach der Satz des Pythagoras, wenn nehmen wir an a = Kantelänge von Q:



falls $r^2 = \underbrace{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{2}\right)^2}_{n \text{ mal}} = \frac{n}{4} a^2$

dann es gilt $a = \frac{2r}{\sqrt{n}}$: $x + \left[-\frac{r}{\sqrt{n}}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right]^n \subset B_r(x)$

Also, $\mathcal{L}^n(B_r(x)) \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \mathcal{L}^n\left(x + \left[-\frac{r}{\sqrt{n}}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right]^n\right) = \mathcal{L}^n\left(\left[-\frac{r}{\sqrt{n}}, \frac{r}{\sqrt{n}}\right]^n\right) = \left(\frac{2r}{\sqrt{n}}\right)^n > 0$.

$\mathcal{L}^n$ = Vol (Prä-Maß) für ein Quader

(ii) Beweisen wir durch Widerspruch, dass falls $\mathrm{Int}(N) \neq \emptyset$, dann existiert ein Kugel $B_r(x) \subset N$ ($x \in \mathrm{Int}(N) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset N$), und dann mit (i):
$0 = \mathcal{L}^n(N) \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \mathcal{L}^n(B_r(x)) \underset{(i)}{>} 0$. Also, muss $\mathrm{Int}(N) = \emptyset$.

(iii) Mit Kontraposition: Nicht $(\forall x \in N, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathbb{R}^n \setminus N : |x - y| < \varepsilon)$
$= (\exists x_0, \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus N, |x_0 - y| \geq \varepsilon_0) \Longrightarrow B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset N$, und das ist Falsche durch (ii). Also, die Kontraposition ist wahr.

A 27: (i) - (ii) $g = \chi_{\mathbb{Q}} = 0$ $\mathcal{L}^1$- fast überall falls existiert ein Null-Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ s.d. $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus N$.

Man kann $N = \mathbb{Q}$ nehmen, weil $\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{q_k\}$, also $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^1(\{q_k\}) = 0$

Aus (i) folgt (ii) denn $\chi_{\mathbb{Q}} \neq 1$ $\mathcal{L}^1$- fast überall. Also (i) ist wahr aber (ii) ist Falsche.

(iii) H ist Konstant auf $]-\infty, 0[$ und $]0, +\infty[$, insbesondere ist Differenzierbar auf $]-\infty, 0[$ und $]0, +\infty[$ mit Ableitung $H' = 0$.

Da $\{0\}$ ein Null-Menge ist, H ist Differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $H'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ implizieren dass H ist fast überall Differenzierbar.

(Kommentar: Man kann beweisen die Schwache Ableitung von H ist δ_0.)

(iv) $f = g$ μ-fast überall bedeutet: $\exists N \subseteq \Omega$, s.d. $f(x) = g(x), \ \forall x \in \Omega \setminus N$ mit $\mu(N) = 0$.

·) Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offen Teilmenge.

$$g^{-1}(U) = \{x \in \Omega : g(x) \in U\} = \{x \in \Omega \setminus N : f(x) \in U\} \cup \{x \in N : g(x) \in U\}$$
$$= f^{-1}(U) \cup \underbrace{\{x \in N : g(x) \in U \text{ oder } f(x) \notin U\}}_{=: \tilde{N} \ : \ \tilde{N} \subset N \implies \mu(\tilde{N}) \leq \mu(N) = 0 \ (\text{Monotonie})}.$$

f μ-messbar $\implies f^{-1}(U)$ μ-messbar

$\tilde{N}$ Null-Menge $\implies \tilde{N}$ μ-messbar

$\implies g^{-1}(U)$ μ-messbar (Vereinigung von μ-messbar Teilmengen auch μ-messbar ist)

·) Beweisen dass $g^{-1}(\{+\infty\})$ und $g^{-1}(\{-\infty\})$ sind μ-messbar ~~sind~~, Analog ist.

(v) Wissen wir $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$, mit $\mathcal{L}^n(N) = 0$.

Sei $x_0 \in N$ fixiert. Sei $\varepsilon > 0$.

f ist stetig in $x_0 \implies \left(\exists \delta > 0, \text{ s.d. } |x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon\right)$ (*)

Nach A26 (iii) für δ anstatt ε: $\exists y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus N$ s.d. $|x_0 - y_0| < \delta$.

also, durch (*): $|f(x_0)| = |f(x_0) - f(y_0)| < \varepsilon$.

Von $\varepsilon \to 0$ dann folgt $f(x_0) = 0$.

(vi) $f \sim_\mu g$ ist ein Äquivalenzrelation weil die Folgende Bedingungen erfüllt:

·) Reflexivität: $f \sim_\mu f$: $f(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega$.

·) Symmetrie: $f \sim_\mu g \implies g \sim_\mu f$, durch symmetrie von "=".

·) Transitivität: $f \sim_\mu g$ und $g \sim_\mu h \implies f \sim_\mu h$

$$\left.\begin{array}{l} f \sim_\mu g \;\Rightarrow\; f(x) = g(x),\ \forall x \in \Omega \setminus N_1 \\ g \sim_\mu h \;\Rightarrow\; g(x) = h(x),\ \forall x \in \Omega \setminus N_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = h(x),\ \forall x \in \Omega \setminus (N_1 \cup N_2)$$

und $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0 \Rightarrow \mu(N_1 \cup N_2) \leq \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0.$