Kapitel 3 σ-Algebren & Maße

3.1. Abstrakte Definitionen

Sei X eine beliebige Menge, 2^X Potenzmenge.

[manchmal: äußeres Maß outer measure

Definition 3.1 (Maß)

Eine Abbildung $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ heißt **Maß** (engl. measure) !

Falls ~~Für alle~~ gilt:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ Falls $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Beispiel 3.2 $X \neq \emptyset$

(i) $\mu(\emptyset) := 0$, $\mu(A) = 1$ Falls $A \neq \emptyset$

(ii) $\mu(A) = \# A$ (Zählmass)

(iii) Jordan-"Maß" (inneres/äußeres) <u>kein</u> Maß

Ex $\rightsquigarrow$ $\boxed{Ü}$

Bemerkung 3.3 Jedes Maß:

- σ-Subadditivität:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

- Monotonie:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \qquad \text{falls } A \subseteq B.$$

$\boxed{\text{Ü}}$

Definition 3.4. (Meßbare Menge / Carathéodory)
$A \subseteq X$ heißt μ-messbar (measurable), falls für jedes $B \subseteq X$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

[$\Leftrightarrow$ $\quad \mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$

da immer gilt $\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu((B \cap A) \cup B \setminus A)) = \mu(B)$.]

Beispiel 3.5

. Im Falle μ aus Beispiel 3.2 (i) sind nur die Mengen $\emptyset$ und X messbar.

(3.2) (ii) sind alle Mengen messbar

.

Beobachtung: 3.6

- Für jedes Maß μ sind $\emptyset, X$ messbar.
- Ist A messbar, so ist auch $A^c = X \setminus A$ messbar

$$\mu(B \cap A^c) + \mu(B \setminus A^c) = \qquad \forall B \subseteq X.$$
$$= \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A)$$
$$\overset{A \text{ messbar}}{=} \mu(B).$$

- Sind A_1, A_2 messbar, so ist $A_1 \cup A_2$ messbar:

$\cancel{\mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2))}$

$\cancel{= \mu((B \cap A_1)}$

Es gilt $\cdot\ \mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1)$

$\cdot\ \mu(B \setminus A_1) = \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2)$

$$\Rightarrow \quad \mu(B)$$

$$= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1)$$

$$= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu(\underbrace{(B \setminus A_1) \setminus A_2}_{= B \setminus (A_1 \cup A_2)})$$

$$(B \cap A_1) \cup ((B \setminus A_1) \cap A_2)$$

$$= B \cap (A_1 \cup A_2)$$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\geq} \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)).$$

Dies reicht nach Bemerkung in Def. 3.4. um zu zeigen, dass $A_1 \cup A_2$ messbar sind.

$\rightsquigarrow$ μ- Messbare Mengen haben Algebra Struktur:

Def. 3.7. (σ-) Algebra

Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ heißt **Algebra**, Falls

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$.

iii) $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ heißt **σ-Algebra**, Falls in (iii) auch $m = \infty$ (abzählbare Vereinigungen) erlaubt.

⌜ Da $\bigcap_k A_k = \left(\bigcup_k A_k^c \right)^c$ gelten (iii) auch für Schnitte! ⌟

Beispiel 3.8

$X \neq \emptyset$, dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Algebra.

$\mathcal{A} := 2^X$ ist σ-Algebra.

Satz 3.9

Sei $\mu: 2^X \to [0,\infty]$ Maß, dann ist

$$\Sigma := \{ A \subseteq X \,,\; A \text{ ist } \mu\text{-messbar} \}$$

eine σ-Algebra.

Beweis: Mit Beobachtung 3.6 klar: Σ ist Algebra.

Zeige noch σ-Algebra.

Seien $(A_k)_{k=1}^\infty \subseteq \Sigma$. Zeige $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \Sigma$.

1. OE gilt $A_k \cap A_\ell = \emptyset \quad \forall k \neq \ell$

[sonst betrachte
$$\tilde{A}_1 := A_1, \quad \tilde{A}_k := A_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} A_\ell \in \Sigma$$]

2. Da (A_k) alle messbar: $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\mu\Big(B \cap \bigcup_{k=1}^m A_k\Big) = \mu\Big(B \cap \underbrace{\bigcup_{k=1}^m A_k \cap A_m}_{\text{// } A_m}\Big) + \mu\Big(B \cap \underbrace{\bigcup_{k=1}^m A_k \setminus A_m}_{\text{// disjunkt: } \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k}\Big)$$

$$= \mu(B \cap A_m) + \mu\Big(B \cap \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big)$$

$$\overset{\text{Induktion}}{=} \sum_{k=1}^m \mu(B \cap A_k).$$

3.

$$\mu(B) = \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} A_k}_{\substack{\cup \\ B \setminus A}}\right)$$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\geq} \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) + \mu(B \setminus A)$$

$$\overset{2.}{=} \sum_{k=1}^{m} \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A)$$

Für $m \to \infty$:

$$\mu(B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A)$$

$$\overset{\mu\ \sigma\text{-additiv}}{\geq} \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu(B \setminus A)$$

$$= \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

$\Rightarrow$ ~~μ-M~~ A messbar

□ 5.3.9.

~~Satz~~ Def 3.10

Falls $\mu : 2^X \to [0,\infty]$ Maß auf X, Σ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen, so heißt

(X, Σ, μ) Maßraum.

Satz 3.11

Seien $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

i) $A_k \cap A_l = \emptyset \quad \forall k \neq l \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (σ-Additivität)

ii) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \ldots \implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$

iii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_k \supseteq \ldots$ & $\mu(A_1) < \infty \implies \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Beweis: (i) Oben (Beweis S. 3.9) gesehen: $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall B \subseteq X$

$$\cancel{\mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right)}$$

$$\mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(B \cap A_k) \qquad \forall B$$

$B = X$
$$\implies \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) \qquad (*)$$

$\wedge$ Monotonie

$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Mit σ- subadditivität von μ

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\Rightarrow$ (i).

(ii) $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Wähle $\begin{cases} \tilde{A}_1 := A_1 \\ \tilde{A}_k := A_k \setminus A_{k-1}. & k \geq 2. \end{cases}$

$\overset{A_i \subseteq A_{i+1}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{A}_k$ paarweise disjunkt

$\bigcup \tilde{A}_k = A$.

$\Rightarrow$

$$\overset{(i)}{\Rightarrow} \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(\tilde{A}_k) \overset{(*)}{=} \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} \tilde{A}_k}_{= A_m}\Big)$$

//

(iii) Setze $\tilde{A}_k := A_1 \setminus A_k$.

$\Rightarrow$ $\tilde{A}_k$ erfüllen Voraussetzungen von Teil ii)

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(\tilde{A}_k)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} (\underset{\substack{\wedge\\ \infty}}{\mu(A_1)} - \mu(A_k)) = \lim_{k\to\infty} \mu(\tilde{A}_k)$$

$$\overset{\text{Teil i)}}{=} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\Big)$$

$$= \mu\Big(A_1 \setminus \underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}_{\subset A_1}\Big)$$

$$= \underset{\substack{\wedge\\ \infty}}{\mu(A_1)} - \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \qquad \square \text{ (iii)}$$

$\square$ S. 3.11

<u>Bemerkung</u>: Teil (iii) i.A. falsch falls $\mu(A_1) = \infty$.

Bsp: μ Zählmaß, $X = \mathbb{N}$, $A_k := \{k, k+1, \dots\}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $\mu(A_k) = \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ aber $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\emptyset) = 0$.

Def. 3.12 (Nullmenge)

(X, Σ, μ) Maßraum. Eine Menge $N \subseteq X$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ-Nullmenge.

Satz 3.13 (alle Nullmengen messbar)

(X, Σ, μ) Maßraum, N eine μ-Nullmenge. Dann ist N μ-messbar.

Beweis:

$\forall B \subseteq X$:

$$\mu(B \cap N) + \mu(B \setminus N)$$

$\le$ ← Monotonie → $\le$

$$\le \underset{= 0}{\mu(N)} + \mu(B) = \mu(B) \qquad \square$$

$\Rightarrow N$ μ messbar.