3.2. Konstruktion von Maßen:

Ziel: Konstruiere Maße auf Algebren $\rightsquigarrow$ setze fort. ('Caratheodory-Hahn')

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.

Def. 3.14 (Überdeckungsklasse)

$\mathcal{K} \subseteq 2^X$ heißt Überdeckungsklasse falls

i) $\emptyset \in \mathcal{K}$

ii) $\exists \, (K_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}$ so dass $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

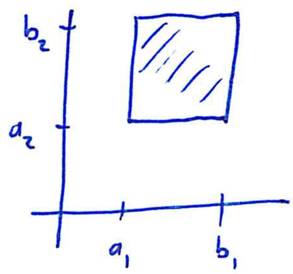
Beispiel: 3.15

i) Die offenen/abgeschlossenen/halboffenen Intervalle

$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ mit $a_k \leq b_k \in \mathbb{R}$

$[\quad]$

$[\quad)$



bilden eine Überdeckungsklasse von $\mathbb{R}^n$.

ii) Jede ~~alle~~ Algebra ~~ist~~ $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ ist eine Überdeckungsklasse. (da $\emptyset, X \in \mathcal{A}$)

Satz 3.16

Sei $\mathcal{K}$ eine Überdeckungsklasse für X,

$\lambda : \mathcal{K} \longrightarrow [0,\infty]$ mit $\lambda(\emptyset) := 0$.

Dann wird durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_j) \ : \ K_j \in \mathcal{K} \ \& \ \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supseteq A \right\}$$

! !

ein Maß auf X definiert.

Beweis: $\cdot\ \mu$ wohldefiniert

$\cdot\ \mu(A) \in [0,\infty]$, $\mu(\emptyset) = \emptyset$.

Sei $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Zu zeigen: $\boxed{\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).}$

Sei $\varepsilon > 0$.

Für jedes A_k $\exists\ (K_{kj})_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}$ s.d.

$$\cancel{\mu(A_k)}) \ \cancel{\leq} \quad A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{kj},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_{kj}) \leq \mu(A_k) + 2^{-k}\varepsilon. \qquad (*)$$

!

$$\Rightarrow \quad A \subseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{\infty} K_{kj}, \text{ also}$$

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_{kj}) \overset{*}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(A_k) + 2^{-k}\varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \varepsilon.$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\square$ gezeigt. $\square$

Beispiel 3.17

$X \neq \emptyset \,, \quad K = \{\emptyset, X\} \,, \quad \lambda(\emptyset) = 0 \,, \quad \lambda(X) = 1.$

Dann ist μ aus Satz 3.16 das Maß $\mu(A) = \begin{cases} 1 & A \neq \emptyset \\ 0 & A = \emptyset. \end{cases}$ $\boxed{Ü}$

FRAGE: · Wann gilt für das μ aus Satz 3.16:

· $\mu(A) = \lambda(A)$?

· Wann sind alle $K \in K$ auch μ-messbar?

Def. 3.18 (Prä-Maß)

Sei $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ eine Algebra. Eine Abbildung $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt Prä-Maß, falls

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ ~~mit~~, $A_k \in \mathcal{A} \ \forall k$ so dass $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $\quad A_k \cap A_l = \emptyset \ \forall k \neq l$.

λ heißt σ-endlich, falls $\exists \, (S_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = X$ und $\lambda(S_k) < \infty$.

~~[OE A_k, S_k oben~~

Satz 3.19 (Caratheodory-Hahn Erweiterungssatz)

Sei $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Prä-Maß, μ wie in Satz 3.16.

Dann gilt:

(i) $\mu : 2^X \to [0,\infty]$ ist Maß

(ii) $\mu(A) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$

(iii) Jedes $A \in \mathcal{A}$ ist μ-messbar.

Beweis: (i) $\mathcal{A}$ ist Überdeckungsklasse, Beh. Folgt aus Satz 3.16.

(ii) Klar ist

$\boxed{\mu(A) \leq \lambda(A)} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

Sei nun $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ für $A \in \mathcal{A}$, $A_k \in \mathcal{A}$.

~~OBdA gilt~~

Sei ~~Es~~ ~~Falls~~ $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ disjunkt:

Setze $\tilde{A}_k := A_k \cap A \in \mathcal{A}$, dann sind

$(\tilde{A}_k)_{k=1}^{\infty}$ disjunkt und $\lambda(\tilde{A}_k) \leq \lambda(A_k)$. (da λ Prämaß).

Da nun $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k = A \underset{\lambda \text{ Prämaß}}{\Rightarrow} \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\tilde{A}_k)$.

Es gilt also

$$\lambda(A) \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ für } \underline{\text{disjunkte}}\ A_k \right\}$$

Da aber $\lambda(A_k) \geq \lambda(A_k \setminus B) \quad \forall B \in \mathcal{A}$, [cf. Satz 3.9

$$\cancel{\leq} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ für beliebige } A_k \right\}$$

[

(iii) Sei $A \in \mathcal{A}$, $B \subset X$ beliebig, $\varepsilon > 0$.

Wähle $B_k \in \mathcal{A}$ s.d. $B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ &

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Da $A, B_k \in \mathcal{A}$: $\underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{\lambda}}(A \cap B_k) + \underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{\lambda}}(B_k \setminus A) = \underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{\lambda}}(B_k)$. (*)

Nun: $B \cap A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A)$ & $B \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \setminus A)$.

Also:

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

$$\overset{\mu \text{ Maß}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k \setminus A)$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Dies gilt $\forall \varepsilon > 0$ $\leadsto$ mit $\varepsilon \to 0$ Folgt Behauptung! $\square$ (iii)

Satz 3.20 ("Eindeutigkeit")

Sei $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ wie in Satz 3.19, zusätzlich noch σ-endlich, μ das induzierte Maß, Σ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen.

Sei $\tilde{\mu} : 2^X \to [0,\infty]$ ein Maß mit $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \lambda|_{\mathcal{A}}$.

Dann ist $\tilde{\mu}|_{\Sigma} = \mu|_{\Sigma}$.

Vorsicht:
- Jedes $A \in \Sigma$ bzgl. $\tilde{\mu}$-messbar
- Auf Elementen $X \setminus \Sigma$ können μ und $\tilde{\mu}$ unterschiedlich sein!

Beweis:

- $$\tilde{\mu}(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k) \quad \forall \underset{\subseteq X}{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} \supseteq A.$$

  Wähle $A_k \in \mathcal{A}$, so gilt

  $$\tilde{\mu}(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) \quad \forall A_k \in \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq A.$$

  $$\overset{\text{infimum}}{\Longrightarrow} \tilde{\mu}(A) \le \mu(A) \quad // \quad (*)$$

-

- Sei $A \in \Sigma$. Zeige $\mu(A) \leq \tilde{\mu}(A)$:

Zunächst nimm an $A \subseteq S$ für ein $S \in \mathcal{A}$, $\lambda(S) < \infty$.

Es gilt

$$\tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A) \overset{*}{\leq} \mu(A) + \mu(S \setminus A) \underset{A\ \mu\text{-messbar}}{=} \mu(S)$$

$$\underset{S \in \mathcal{A}}{=} \lambda(S) = \tilde{\mu}(S) \underset{\text{Subadditivität von } \tilde{\mu}}{\leq} \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A).$$

Also gilt "=" in jeder Ungleichung oben

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A) = \mu(A) + \mu(S \setminus A).$$

Falls $\boxed{\tilde{\mu}(S \setminus A) < \infty}$ folgt daraus

$$\tilde{\mu}(A) \geq \mu(A),$$

da mit $*$ $-\tilde{\mu}(S \setminus A) + \mu(S \setminus A) \geq 0$.

$$\boxed{\tilde{\mu}(S \setminus A) \overset{*}{\leq} \mu(S \setminus A) \leq \mu(S) = \lambda(S) < \infty.}$$

//

· Für generelles $A \in \Sigma$ betrachte $S_k \in \mathcal{A}$ s.d.

$$\cancel{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \quad , \quad \lambda(S_k) < \infty \quad , \quad \text{OBdA}$$

$$\underline{S_k \subseteq S_{k+1}}.$$

$A_k := A \cap S_k$. Es gilt $\tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right)$ $\forall m \in \mathbb{N}$ nach obiger Rechnung.

Monotonie

Also: $$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \xrightarrow{m \to \infty} \mu(A)$$

Satz 3.11 (ii).

Also · $\tilde{\mu}(A) \geq \mu(A)$ $\forall A \in \Sigma$.

· $\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A)$ $\forall A \subseteq X$.

$\square$ 5.3.20.