Korollar 5.33 (Minkowski-Ungleichung) (Dreiecksungleichung von L^p)

Sei $1 \le p \le \infty$, $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. Dann $f+g \in L^p(\Omega,\mu)$ und

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega,\mu)} \le \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} + \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)}.$$

Beweis: $\boxed{p=1}$ $|f+g| \le |f| + |g|$ μ-a.e. $\Rightarrow$ Monotonie des Integrals:

$$\underbrace{\int_\Omega |f+g|\, d\mu}_{=\|f+g\|_{L^1(\Omega,\mu)}} \le \underbrace{\int_\Omega |f|\, d\mu}_{=\|f\|_{L^1(\Omega,\mu)}} + \underbrace{\int_\Omega |g|\, d\mu}_{=\|g\|_{L^1(\Omega,\mu)}}$$

$\boxed{p=\infty}$ $|f(x)+g(x)| \le |f|(x) + |g|(x) \le \|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ μ-a.e.

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{ess\,sup}_\mu |f+g|}_{=\|f+g\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}} \le \|f\|+\|g\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$$

$\boxed{1<p<\infty}$ $q := \frac{p}{p-1} = p'$ Hölder-Konjugierte Exponent.

Es gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ~~$p \ge 1$~~ $1 \le p < \infty$

$$|a+b|^p = 2^p \left|\frac{a+b}{2}\right|^p \underset{\uparrow}{\le} 2^p \left(\tfrac{1}{2}|a|^p + \tfrac{1}{2}|b|^p\right)$$

$|\cdot|^p$ ist konvexe Fkt.

Also

$$|f(x)+g(x)|^p \le 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p$$

Monotonie $\Rightarrow$ $f+g \in L^p$, $\|f+g\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} \le 2^p \left(\|f\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} + \|g\|^p_{L^p}\right) < \infty$

Immerhin: $\boxed{\|f+g\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty}$

Es gilt $\boxed{\|f+g\|^p_{L^p(\Omega,\mu)}}$

$$= \int_\Omega |f+g|\;|f+g|^{p-1}\,d\mu$$

Monotonie + Linearität $\int_\Omega d\mu$

$$\leq \int_\Omega |f|\;|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_\Omega |g|\;|f+g|^{p-1}\,d\mu$$

$$= \big\|\,|f|\;|f+g|^{p-1}\big\|_{L^1(\Omega,\mu)} + \big\|\,|g|\;|f+g|^{p-1}\big\|_{L^1(\Omega,\mu)}$$

Hölder: L. 5.31, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)}\;\|f+g\|^{p-1}_{L^q(\Omega,\mu)} + \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)}\;\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{L^q(\Omega,\mu)}$$

$\| \;\boxed{?}$

$$\|f+g\|^{p-1}_{L^{q(p-1)}(\Omega,\mu)}$$

$\| \quad q = \frac{p}{p-1}$

$$\|f+g\|^{p-1}_{L^p(\Omega,\mu)}$$

$$\boxed{= \left(\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} + \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)}\right)\|f+g\|^{p-1}_{L^p(\Omega,\mu)}}$$

Also: $$\frac{\|f+g\|^p_{L^p(\Omega,\mu)}}{\|f+g\|^{p-1}_{L^p(\Omega,\mu)}} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} + \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)} \qquad \square$$

Für Satz 5.30 fehlt noch:

Lemma 5.34 (Vollständigkeit)

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p = L^p(\Omega,\mu)$, (d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_k - f_\ell\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \varepsilon \quad \forall k,\ell \geq K.$),

dann $\exists\, f \in L^p(\Omega,\mu)$ mit $\|f - f_k\|_{L^p(\Omega,\mu)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Beweis: $\boxed{p=\infty}$ $\quad (f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist μ-a.e. C.F in $\mathbb{R}$,

d.h. für μ-a.e. $x \in \Omega$ $\exists\, f(x)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Nun gilt $\quad |f_k(x) - f(x)| \leq \lim_{\ell\to\infty} |f_k(x) - f_\ell(x)|$

$$\leq \limsup_{\ell\to\infty} \|f_k - f_\ell\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \quad \mu\text{-a.e.}$$

Nimm ess-sup $\Rightarrow$ $\quad \|f_k - f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \leq \limsup_{\ell\to\infty} \|f_k - f_\ell\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$

$\boxed{1 \le p < \infty}$

Konstruiere zunächst Teilfolge $l(k) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ s.d.

$$\left(f_{l(k)}\right)_{k=1}^{\infty} \text{ konvergent in } L^p.$$

$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \ l(k) \ge l(k-1)$ s.d.

$$\| f_l - f_m \|_{L^p(\Omega,\mu)} < 2^{-k} \quad \forall \, l, m \ge l(k).$$

Setze $F := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{l(k+1)} - f_{l(k)}|$. μ-messbar als Limes von messbarer Fkt.

$F \ge 0 \Rightarrow F$ uneigentlich μ-integrabel

$\Rightarrow F^p$ uneigentlich μ-integrabel

$$\|F\|_{L^p(\Omega,\mu)} \underset{\uparrow}{=} \lim_{l\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{l} |f_{l(k+1)} - f_{l(k)}| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Monotone Konvergenz
Satz 5.20

$$\le \lim_{l\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{l} |f_{l(k+1)} - f_{l(k)}| \right\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

Minkowski

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\| f_{l(k+1)} - f_{l(k)} \|_{L^p(\Omega,\mu)}}_{\le 2^{-k}} \quad \boxed{< \infty}.$$

Korollar 5.33

$$\Rightarrow \quad F \in L^p(\Omega,\mu), \quad \text{also} \quad |F| < \infty \quad \mu\text{-a.e.}$$

$$\& \ \underline{\mu\text{-a.e.}} \ f(x) := \lim_{\ell\to\infty} f_{\ell(\ell)}(x) = \lim_{\ell\to\infty} \overbrace{\sum_{h=1}^{\ell-1} \left(f_{\ell(h+1)}(x) - f_{\ell(h)}(x)\right) + f_{\ell(1)}(x)}^{= f_{\ell(\ell)}(x)}$$

Teleskop-summe

$$\sum_{h=1}^{\infty} |\cdot| \leq F(x) < \infty$$

$\Rightarrow$ Konvergenz !

wohl definiert! μ-a.e.

μ-a.e gilt:

$$|f(x) - f_{\ell(\ell)}(x)| \begin{cases} \leq \sum_{h=\ell}^{\infty} \underbrace{|f_{\ell(h+1)}(x) - f_{\ell(h)}(x)|}_{\text{konvergente Reihe!}} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0 \\ \leq F(x) \quad \mu\text{-a.e.} \end{cases}$$

Majorante

Dominierte Konvergenz $\Rightarrow$ Satz 5.21

$f \in L^p(\Omega,\mu)$ und

$$\|f - f_{\ell(\ell)}\|_{L^p(\Omega,\mu)} \xrightarrow{\ell\to\infty} 0.$$

Also $f_{\ell(\ell)} \to f$ in $L^p(\Omega,\mu)$.

Sei nun $l \in \mathbb{N}$, $\forall$ und k s.d. $l \geq l(k)$ $\forall$.

$$\| f_l - f \|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

(allgemein: C.-F. mit Teilfolge konvergent $\Rightarrow$ C.F. konvergent)

$$\overset{\Delta}{\leq} \underbrace{\| f_l - f_{l(k)} \|_{L^p(\Omega,\mu)}} + \| f_{l(k)} - f \|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

klein für $l, l(k) \gg 1$

$\Uparrow$

Cauchy Folge

$\leq 2^{-k}$ nach Wahl von $l(k)$

$$\| f_{l(k)} - f \|_{L^p(\Omega,\mu)} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\Leftarrow$ obige Rechnung.

$$\xrightarrow{l \to \infty} 0$$

$\square$ L. 5.34.

~~Def. 3.52~~

Def 5.35 (Separabel)

Ein Banachraum X (= Vektorraum mit Norm, der vollständig ist)

heißt separabel $:\Leftrightarrow$ X enthält abzählbare, dichte Teilmenge

$:\Leftrightarrow \exists\, V \subseteq X$, V abzählbar, $\forall x \in X$ ~~$\exists$~~ $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, v \in V$ mit $\|v - x\| < \varepsilon$

(also $\overline{V} = X$).

Satz 5.36

~~L^p~~ Sei $1 \leq p < \infty$.

Dann ist
- $L^p(\Omega, \mu)$ separabel
- $C_c^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega, \mu)$.

($\boxed{\text{Ü}}$: $C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$)

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$.

~~Bem: $p = \infty$~~ vgl. $\boxed{\text{Ü}}$ ~~Ist $\mu(\Omega) < \infty$, Ω beschränkt, so liegen $C^0(\overline{\Omega}) \subseteq L^\infty(\Omega$~~

Bem. • "$p = \infty$" Falsch! Falls ~~$|\Omega| < \infty$~~. Ω beschränkt

$C^0(\overline{\Omega}) \subsetneq L^\infty(\Omega, \mu)$

ist abgeschlossen bezgl. L^∞-Norm

Insbesondere $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in L^∞!

Beweis (Satz 5.36):

(i)

Es sei E die abzählbare Menge

$$E = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{Q_k} \;,\quad a_k \in \mathbb{Q},\; N \in \mathbb{N},$$

jedes Q_k ist ein dyadischer Würfel mit Kantenlänge $2^{-\ell}$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$ $\Big\}$

Zeige E ist dicht in $L^p(\Omega, \mu)$.

Sei $f \in L^p(\Omega, \mu)$, OE $f \geq 0$ (sonst $f = f^+ - f^-$

wende Arg auf f^+ und f^- an.)

Mit Satz 4.4: $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$ μ-a.e.

also $f_k(x) := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \longrightarrow f(x)$ μ-a.e.

monoton↗ ! $f_k \longrightarrow f$ in $L^p(\Omega, \mu)$

Monotone Konvergenz (Satz 5.10) $\Rightarrow$ Also $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$

Es reicht also zu zeigen:

$\forall A \subseteq \Omega$ μ-messbar, $\mu(A) < \infty$ können wir ~~A~~ χ_A durch Funktionen in E approximieren (bzgl. $\|\cdot\|_{L^p}$)

Da μ Radon-Maß: $\Leftarrow$ Satz 3.44

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subseteq G \\ G \text{ offen}}} \mu(G)$$

$\leadsto$ Wähle $G_k \supseteq A$ offen, $G_k \supseteq G_{k+1}$, mit

$$\mu(G_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}. \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Beachte $\chi_{G_k} - \chi_{A} \underset{A \subseteq G_k}{=} \begin{cases} 1 & x \in G_k \setminus A \\ 0 & x \in (G_k \cap A) \cup G_k^c \end{cases}$, also

$$\|\chi_{G_k} - \chi_A\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} = \int_\Omega (\chi_{G_k} - \chi_A)^p \, d\mu = \int_\Omega \chi_{G_k} - \chi_A \, d\mu$$

G_k, A μ-messbar

$$\leq \mu(G_k \setminus A). < \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \quad k \to \infty.$$

$\Rightarrow$ In $\boxed{\qquad\qquad}$ $\subseteq$ A offen.

Satz 3.23 $\rightsquigarrow$ A ist $\stackrel{\text{offen}}{}$ (disjunkte) Vereinigung von dyadischen Würfeln

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \underset{A,\,Q_l\ \mu\text{-messbar}}{\rightsquigarrow} \quad \mu(A) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(Q_l).$$

$$\Rightarrow \quad \Big\| \chi_A - \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \chi_{Q_l}}_{\in E.} \Big\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} = \mu\Big(A \setminus \bigcup_{l=1}^{k} Q_l\Big) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

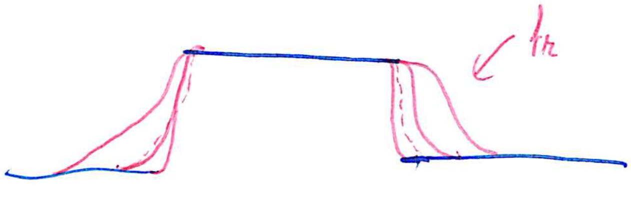
// (i)

(ii) Mit (i) genügt es zu zeigen:

Jedes χ_Q für Q dyadischer Würfel

lässt sich durch glatte Fkt. approximieren in L^p.

Dies geht explizit!



Q

$\Rightarrow$ (ii)

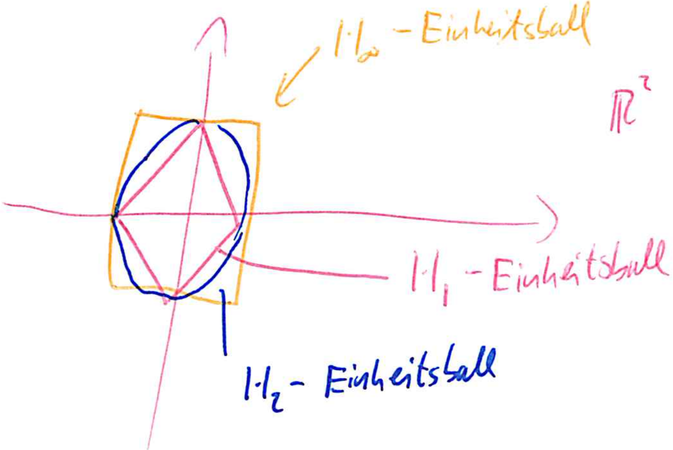
$\square$ S.5.36

Warum "$p=\infty$" ausgeschlossen? Geometrie:

~~Die~~ • Für L^p $1<p<\infty$ sind Einheitskugeln strikt konvex,

L^1, L^∞ nicht!

Das kennen wir bereits aus dem Fall $\mathbb{R}^2$



"Krümmung der Räume L^p"

Satz 5.37 ("Brezis-Lieb")

~~Sei~~ $f, f_k \in L^p(\Omega,\mu)$, $k\in\mathbb{N}$, $1\le p<\infty$. Es sind äquivalent:

(i) $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(ii) $f_k \xrightarrow{\mu} f$ und $\|f_k\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ für $k\to\infty$.

Bew. (i)$\Rightarrow$(ii) • Maßkonvergenz $\Leftarrow$ Korollar 5.11

• $\big|\|f_k\|_{L^p} - \|f\|_{L^p}\big| \overset{\triangle}{\le} \|f_k - f\|_{L^p}$

//

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Es gilt $\quad 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p \geq 0 \quad \forall p \geq 1.$

Falls $\boxed{f_{n_i} \longrightarrow f \quad \mu\text{. a.e.}}$ mit Fatou (S. 5.18)

$$\cancel{\lim} \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega 2^p|f_{n_i}|^p + 2^p|f|^p - |f_{n_i}-f|^p \, d\mu$$

$$\geq 2^{p+1}\int_\Omega |f_n|^p \, d\mu$$

Also $2^{p+1}\int_\Omega |f|^p \, d\mu \underset{\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}}{\leq} 2^{p+1}\int_\Omega |f_n|^p \, d\mu - \limsup_{i\to\infty}\int_\Omega |f_{n_i}-f|^p \, d\mu$

$\Rightarrow \int_\Omega |f_{n_i}-f|^p \, d\mu \xrightarrow{i\to\infty} 0.$ Mit ~~unter~~ $\boxed{}$ Teilfolge!

$\boxed{\text{Angenommen}}$ $\exists$ TF f_{n_j} mit $\lim_{j\to\infty}\int_\Omega |f_{n_j}-f|^p \, d\mu > 0$

$\overset{\text{Satz 4.16}}{\Rightarrow}$ $\exists$ weitere Teilfolge $f_{n_{j_i}}$, die $\boxed{}$ erfüllt

$\Rightarrow$ ↯ mit obiger Rechnung $\int_\Omega |f_{n_{j_i}} - f|^p \, d\mu \xrightarrow{i\to\infty} 0.$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu = 0$ $\qquad \square$ S. 5.37.